

Grundvorstellungen und schriftliche Rechenverfahren?



Sebastian Wartha, Karlsruhe



Fragestellungen

- *Kopfrechnen oder schriftliches Rechnen?*
- *Routine oder Grundvorstellungen?*
- *Grundvorstellungen zu schriftlichen Rechenverfahren*
- *Grundvorstellungen aufbauen und aktivieren*
- *Differenzierende Aufgaben*
- *Reagieren bei Fehlern*

Rechenverfahren

Studie zur Vorgehensweise bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000

- Selter, Ch. (2002): Flexibilität oder AutoMathik? In: Grundschulunterricht 10, S. 12-16
- *oder ausführlich:* Selter, Ch. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, 3/4, S. 227-258.
- Die folgenden Graphiken bis Seite 18 aus diesen Quellen!

Rechenverfahren

- Fragestellung und Studien-Design
- Welches Rechenverfahren wählen Schülerinnen und Schüler bei der Lösung von Aufgaben im Zahlenraum bis 1000?
- ... 298 Schülerinnen und Schüler
- ... jeweils sechs Additions- und Subtraktionsaufgaben
- ...als Klassentest an drei Terminen:
 - im Februar (Mitte drittes Schuljahr, vor Einführung der schriftlichen Rechenverfahren)
 - im Juni (Ende drittes Schuljahr, nach der Einführung)
 - im Oktober (Beginn viertes Schuljahr)

Rechenverfahren

Lösen Sie die Aufgaben und begründen Sie die Wahl des genutzten Rechenverfahrens.

$527+399$	$199+198$	$286+437$
$250+379+250$	$119+120+121$	$345+634$

Schätzen Sie ein welche Aufgabe für die Schüler am leichtesten und welche am schwersten war.

Rechenverfahren

Lösen Sie die Aufgaben und begründen Sie die Wahl des genutzten Rechenverfahrens.

$845-399$	$836-567$	$610-590$
$649-347$	$701-698$	$758-515$

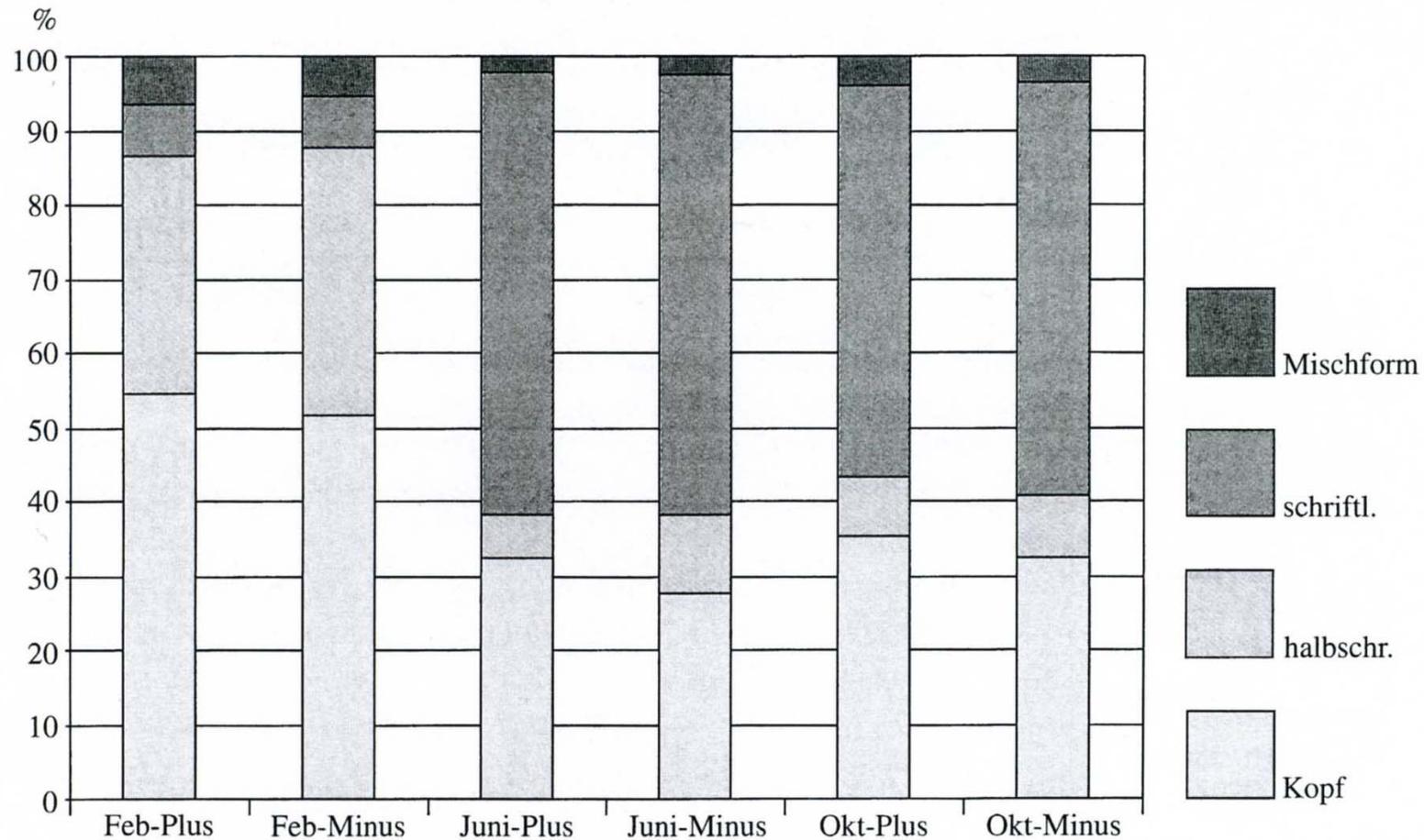
Schätzen Sie ein welche Aufgabe für die Schüler am leichtesten und welche am schwersten war.

Rechenverfahren

- Einige Ergebnisse der Studie

Rechenmethoden – Februar, Juni, Oktober

Grafik 1

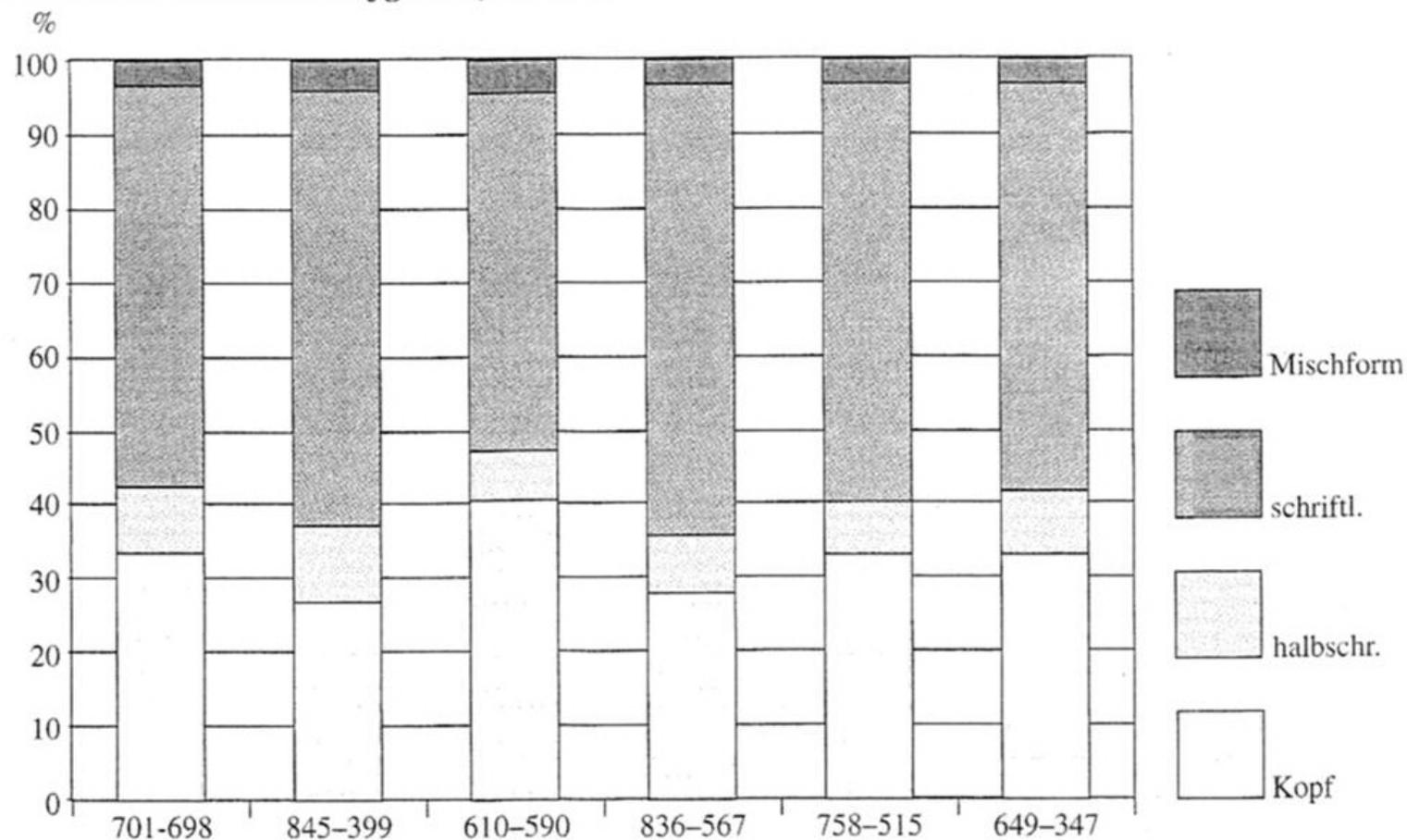


Rechenverfahren

- Einige Ergebnisse der Studie

Methoden bei Minusaufgaben, Oktober

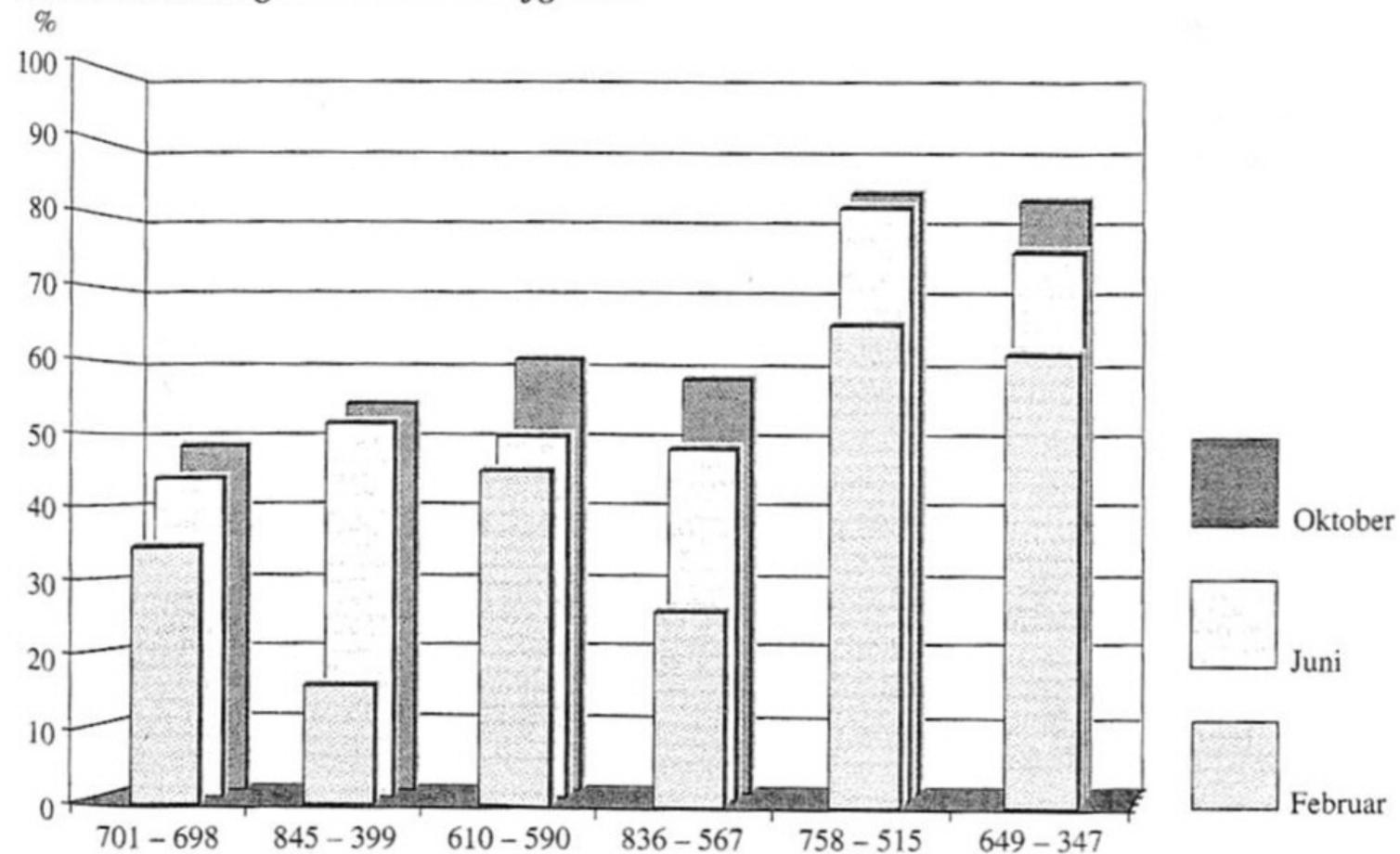
Grafik 2



Rechenverfahren

- Einige Ergebnisse der Studie

Korrekte Lösungen der Minusaufgaben



Rechenverfahren

- Einige Ergebnisse der Studie
- Erfolgsquote der Rechenmethoden

	Addition	Subtraktion
Im Kopf	78,4 % (552)	61,6 % (511)
Gestützt	77,6 % (125)	36,4 % (131)
Schriftlich	88,9 % (830)	71,2% (874)

Rechenverfahren

Einige Ergebnisse der Studie

701-698

- ... über den ganzen Studienzeitraum die „schwierigste“ Aufgabe
- ... insgesamt 84 verschiedene Ergebnisse
- ... Lösungen zwischen 0 und 1903

0	19	99	117	193	364	703
1	20	100	133	196	390	761
2	28	101	147	197	399	903
3	32	102	167	198	497	907
4	63	103	179	199	502	997
7	71	104	182	200	503	1003
8	83	107	183	203	510	1017
9	84	109	184	223	563	1393
11	87	112	187	290	604	1399
12	91	113	188	302	613	1403
13	93	114	190	317	687	1903
17	97	116	191	344	693	

Rechenverfahren

- Einige Lösungsversuche

$$\begin{array}{r} 701 - 698 = 101 \\ \hline (700 - 698) \\ \hline 700 - 699 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 707 - 600 = (107) 707 \\ 707 - 98 = 7 \end{array}$$

700	-	600	=	100		
90	-	0	=	90		
8	-	1	=	7		
100	+	90	+	7	=	197

$$\begin{array}{r} (701 - 690 =) \\ 700 - 690 = 10 \\ 10 + 1 = 11 \\ 11 - 8 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 - 600 = 700 \\ 70 - 8 = 2 - 7 = 7 \end{array}$$

Rechenverfahren

- Einige Lösungsversuche

$$\begin{array}{r} 701 \\ - 698 \\ \hline 123 \\ \hline 1903 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 701 \\ - 698 \\ \hline 107 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 701 \\ - 698 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 701 \\ - 698 \\ \hline 193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 701 \\ \cancel{698} \\ 197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 701 \\ \cancel{698} \\ 997 \end{array}$$

Rechenverfahren

- Wie viel ist $701 - 698$?

	7	0	1
*	6	9	8
	1	9	7

- 8 minus 1 gleich 7, 9 minus 0 gleich 9, 7 minus 6 gleich 1. 197!
- Kannst du das auch anders rechnen?
- Ja. Von 698 bis 700 sind es 2 und von 701 bis 700 ist es 1, also sind's 3.

Rechenverfahren

Mhm. Die selbe Aufgabe, aber zwei verschiedene Ergebnisse?

Mhm, weiß auch nicht.

Kann denn Beides richtig sein?

Ne.

Was denkst du denn, was stimmt?

Das da! (*Er zeigt auf das schriftlich Gerechnete.*)

Warum glaubst du, dass das stimmt und das andere nicht?

Ja, weil das hier (*zeigt auf das schriftlich Gerechnete*) habe ich richtig ausgerechnet und das andere habe ich mir nur so hopp-di-hopp im Kopf überlegt.

ESTIMA (5. Jahrgangsstufe)

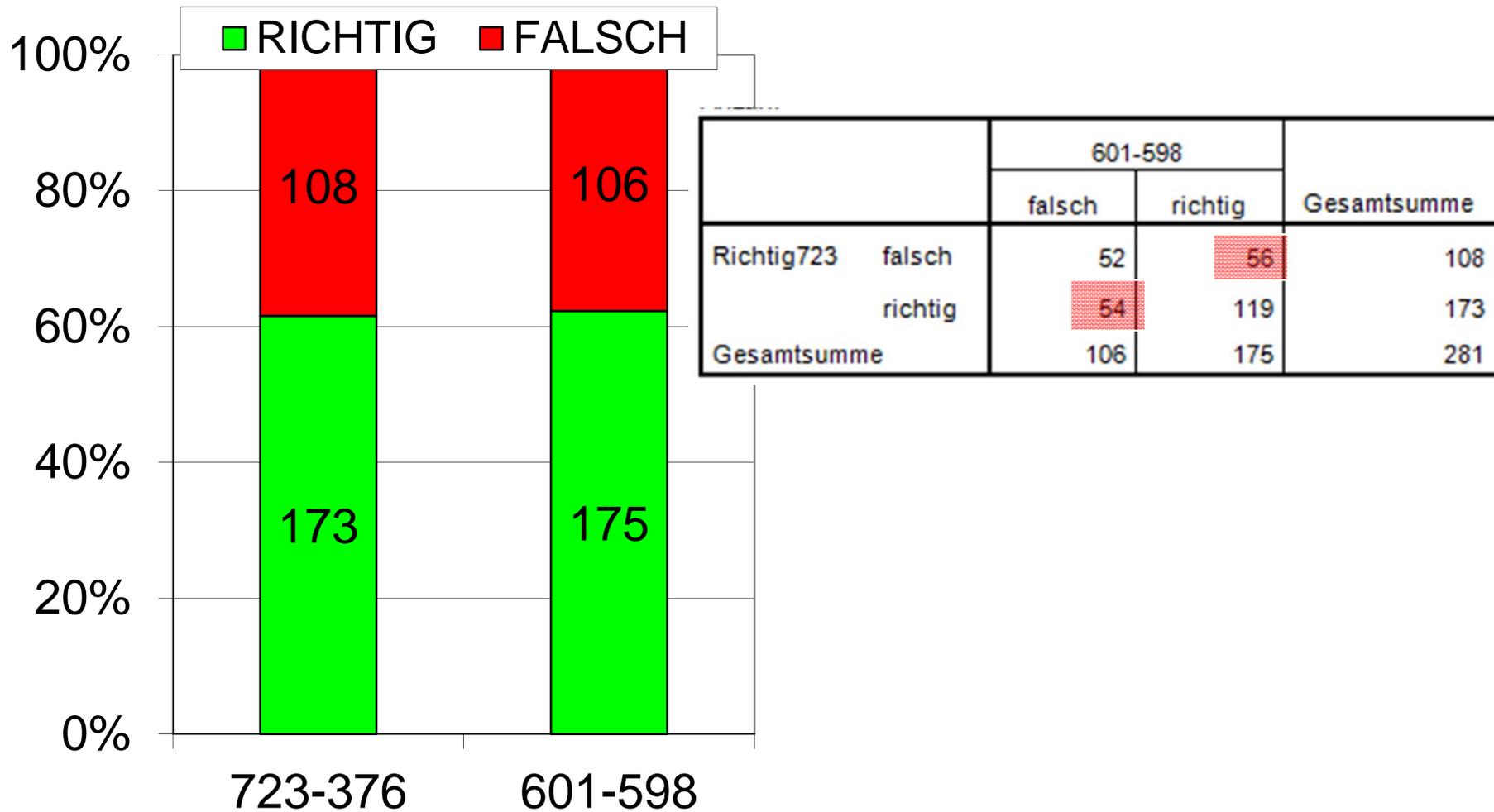
Fragestellungen:

- Welche Rechenmethoden verwenden Kinder zu Beginn der Sekundarstufe (Hauptschule) im Zahlenraum bis 1000
- Welche Grundvorstellungen zu Zahlen, Operationen und Strategien aktivieren sie im Zahlenraum bis 1000

Aufgaben im Interview:

- $723 - 376$ und $601 - 598$
- Blitzlicht – Studie wird aktuell durchgeführt
- Derzeitiger Stand: N=201 Kinder (10 Schulen, 13 Klassen)

1. & 2. Forschungsfrage



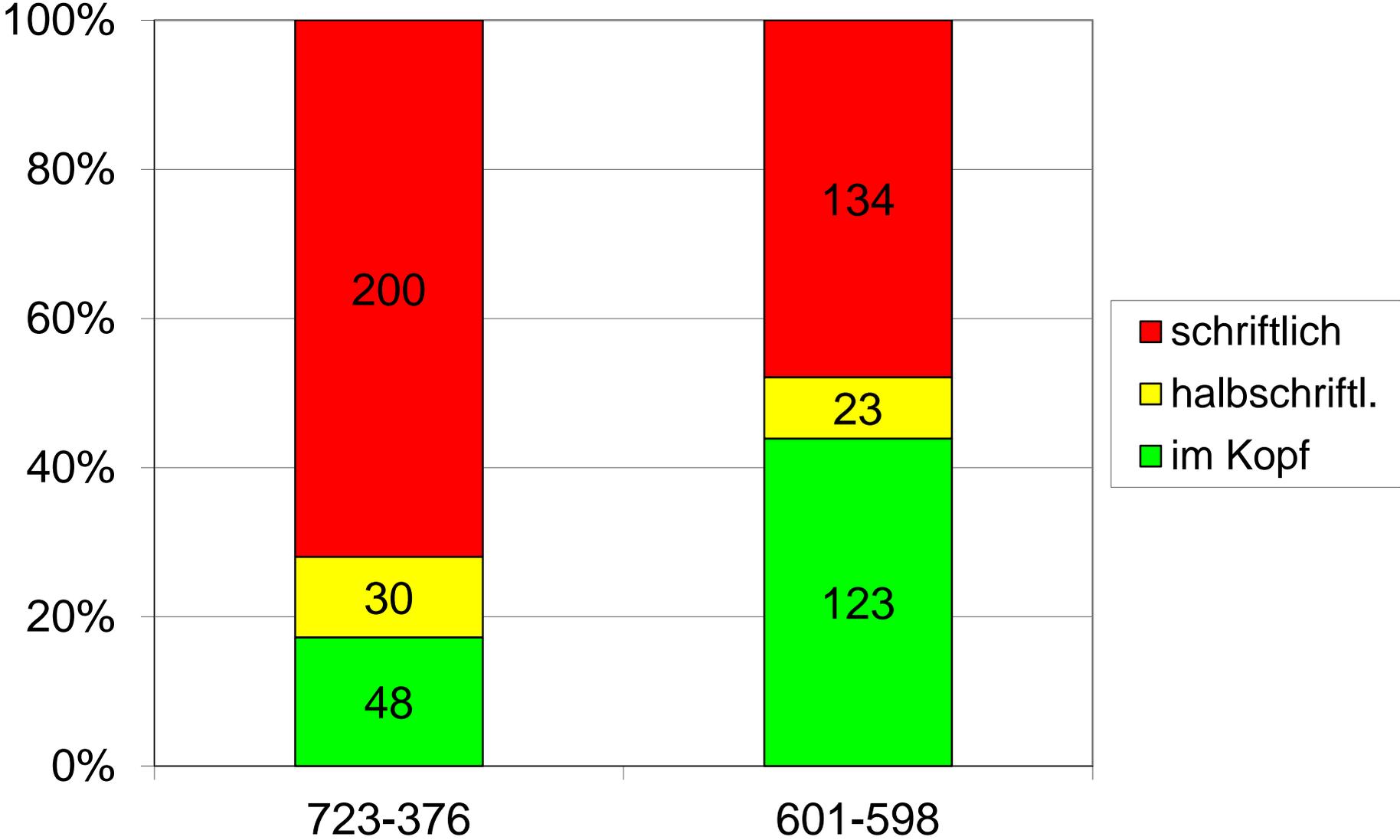
Flexibilität der Methode

		601 - 598				Gesamtsumme
		im Kopf	gestützt	Schriftlich	am Material	
723 - 376	im Kopf	43	2	7	0	52
	gestützt	17	12	2	0	31
	Schriftlich	73	8	142	0	223
	am Material	2	1	0	1	4
Gesamtsumme		135	23	151	1	310

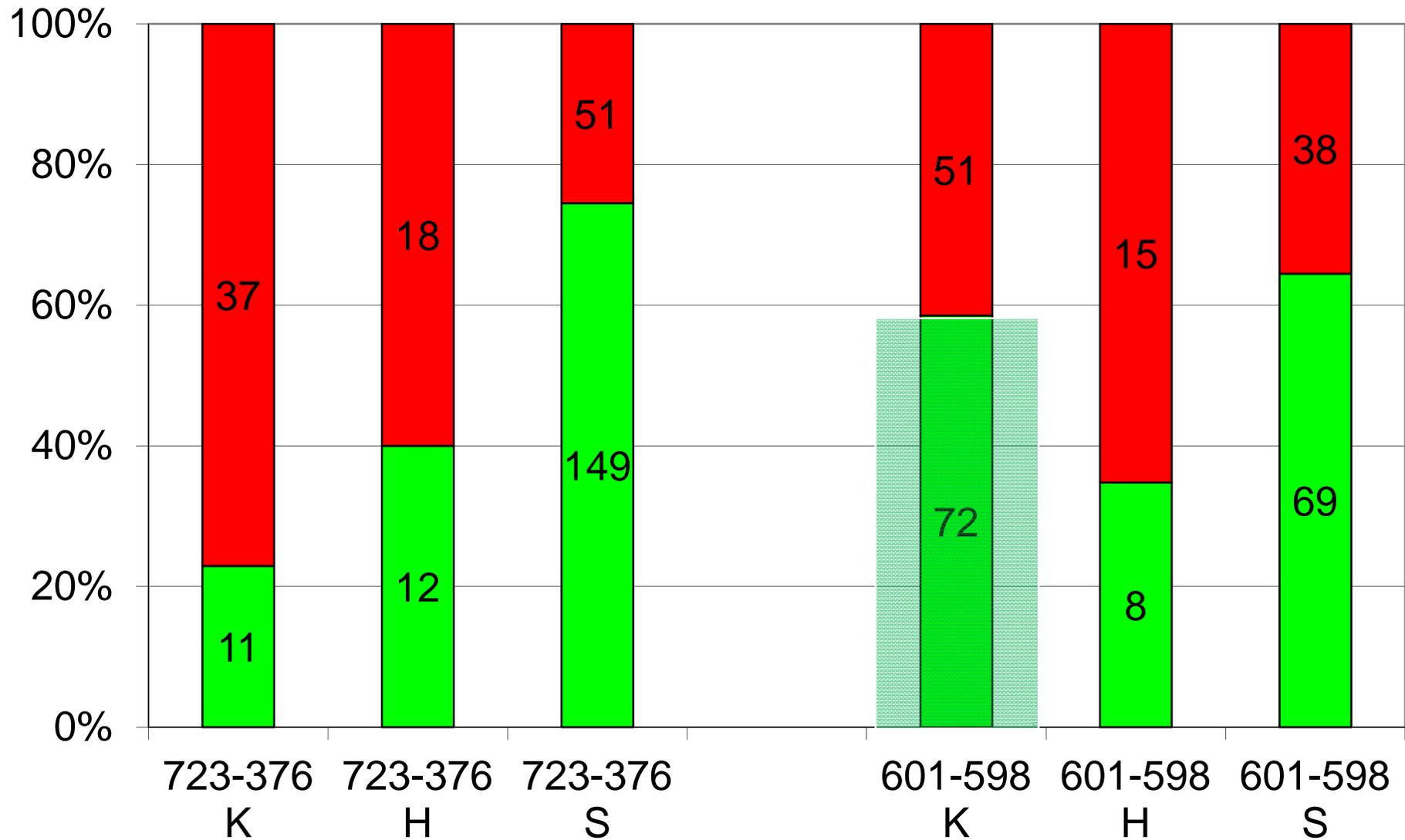
197 von 310 (64%) nicht flexible Methode

73 von 310 (24%) adaptive Methode

Gewählte Methoden



Erfolgsquoten der Methode



Rechenstrategien

- 601 – 598: Rechenstrategien der Jugendlichen, die 601-598
- RICHTIG und IM KOPF lösen

Rechenrichtung (Strategie)	Anzahl insges.	Anzahl adap. Methode
Ergänzen	38	22
Ergänzen (Schriftlich im Kopf)	8	7
Wegnehmen (Hilfsaufgabe)	5	3
Wegnehmen (Schrittweise, Misch, Stellenw. extra, ...)	21	7
Summe	72	39

Zusammenfassung

- Bei der Aufgabe 601 – 598 zeigt sich:
 - Wird nicht besser gelöst als 723 – 376
 - Wird häufiger im Kopf bearbeitet als 723 – 376
 - Aber dennoch von 50 % der Fünftklässler über schriftlichen Algorithmus
 - Wenn Kopfrechnen, dann nur sehr selten über Strategien des Ergänzens
 - Nur 17 % der befragten Kinder lösen die Aufgabe „schnell“

3. Forschungsfrage

- Gründe, warum die Lösung von $601 - 598$ „nicht gesehen“ wird
 - Keine Alternativen
 - Rechengeschichte: Dominanz von Wegnehm-Situationen
 - Materialkenntnis fehlt (MSB, v.a. aber Rechenstrich)
 - Materialhandlungen beim Wegnehmen nicht klar (Legen des Subtrahenden)
 - Heuristiken fehlen (wie entscheiden?)
 - Zahlbeziehungen werden vor dem Lösen nicht gesehen

3. Forschungsfrage

Emile	Lösung	Ulli	
Kopfrechnen	197	Kopfrechnen	398
		Schriftlich	103
Rechengeschichte	3		
Materialhandlung (MSB)	17	Material (MSB)	103
Nachfrage Differenz	3	Nachfrage Differenz	3

EMILE

$$\begin{array}{r} 601 \\ - 598 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ulli

Studierendenbefragung

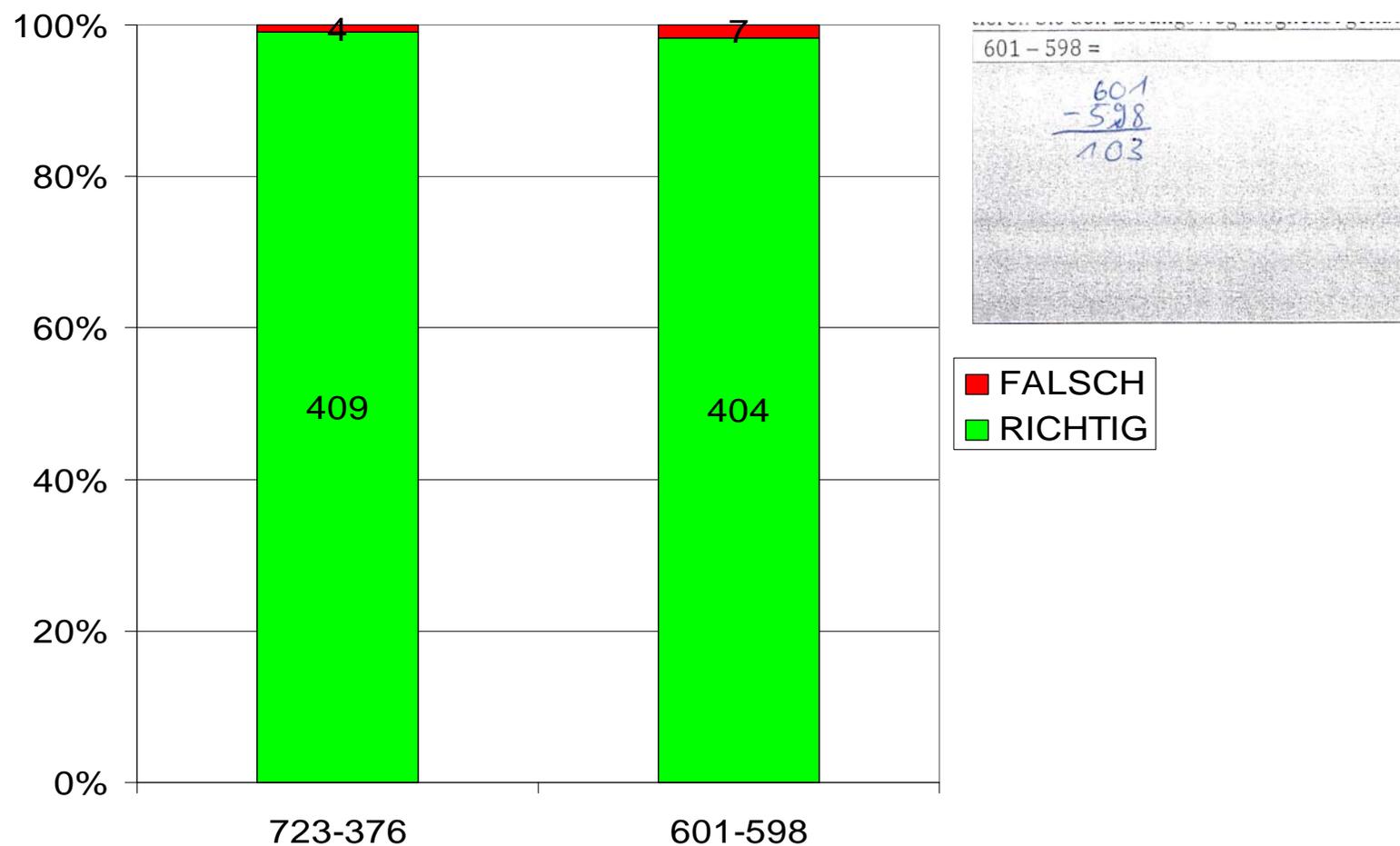
- Welche Grundvorstellungen aktivieren Studierende beim Übersetzen symbolischer Rechenausdrücke (2. Klasse)?
- Wie flexibel sind Studierende beim Subtrahieren im Zahlenraum bis 1000 (3. Klasse)?

Studierendenbefragung

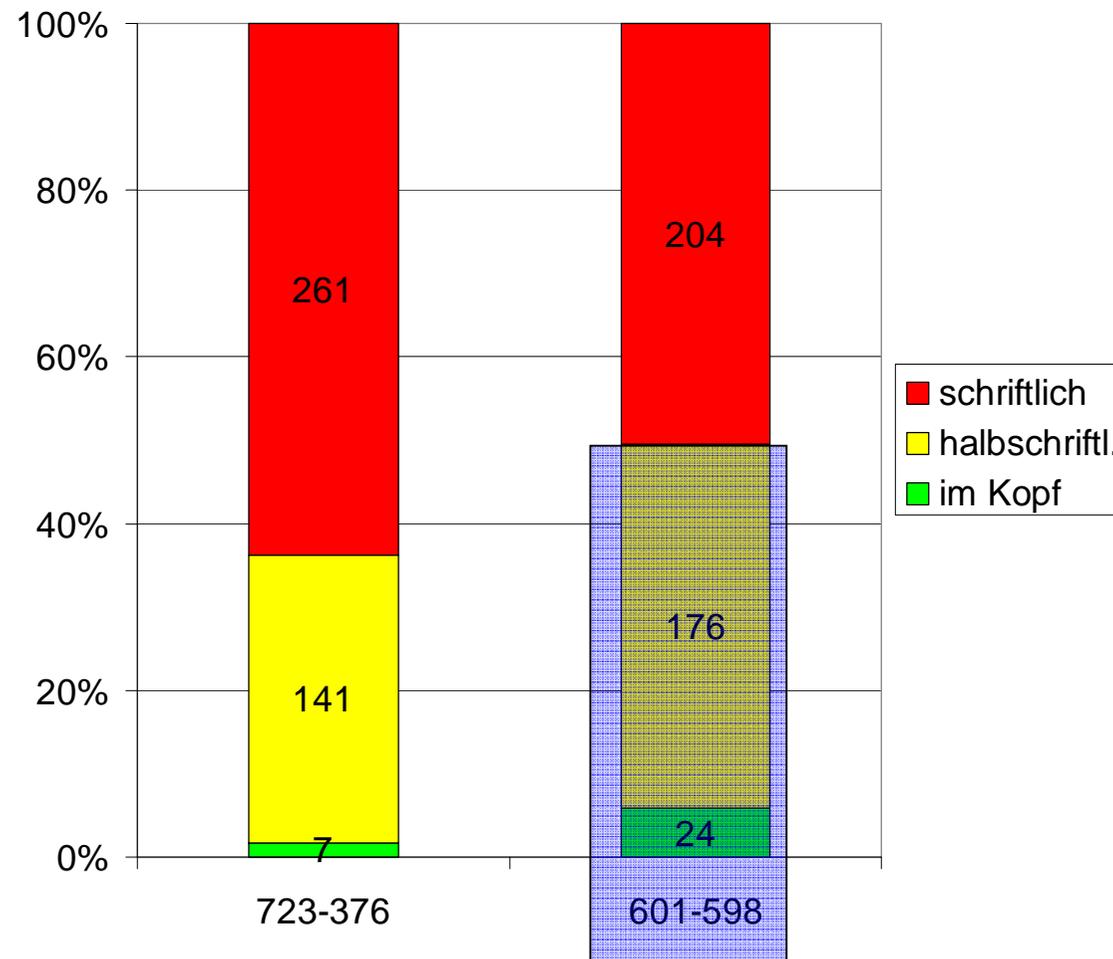
- Befragt wurden insgesamt 428 Studierende in der ersten Woche des WS 2011 (PH KA 1) und SS 2012 (andere)
- Grundvorstellungen zu Operationen

Stichprobe	PH KA 1	Uni BI	LMU M	Insgesamt
Lehramt G	129	192		221
Lehramt S	78	*23		101
Semester 1-2	63	186		249
Semester >2	144	**22		166
Insgesamt	207	221		428

Studierendenbefragung – Richtige Lösungen



Methode



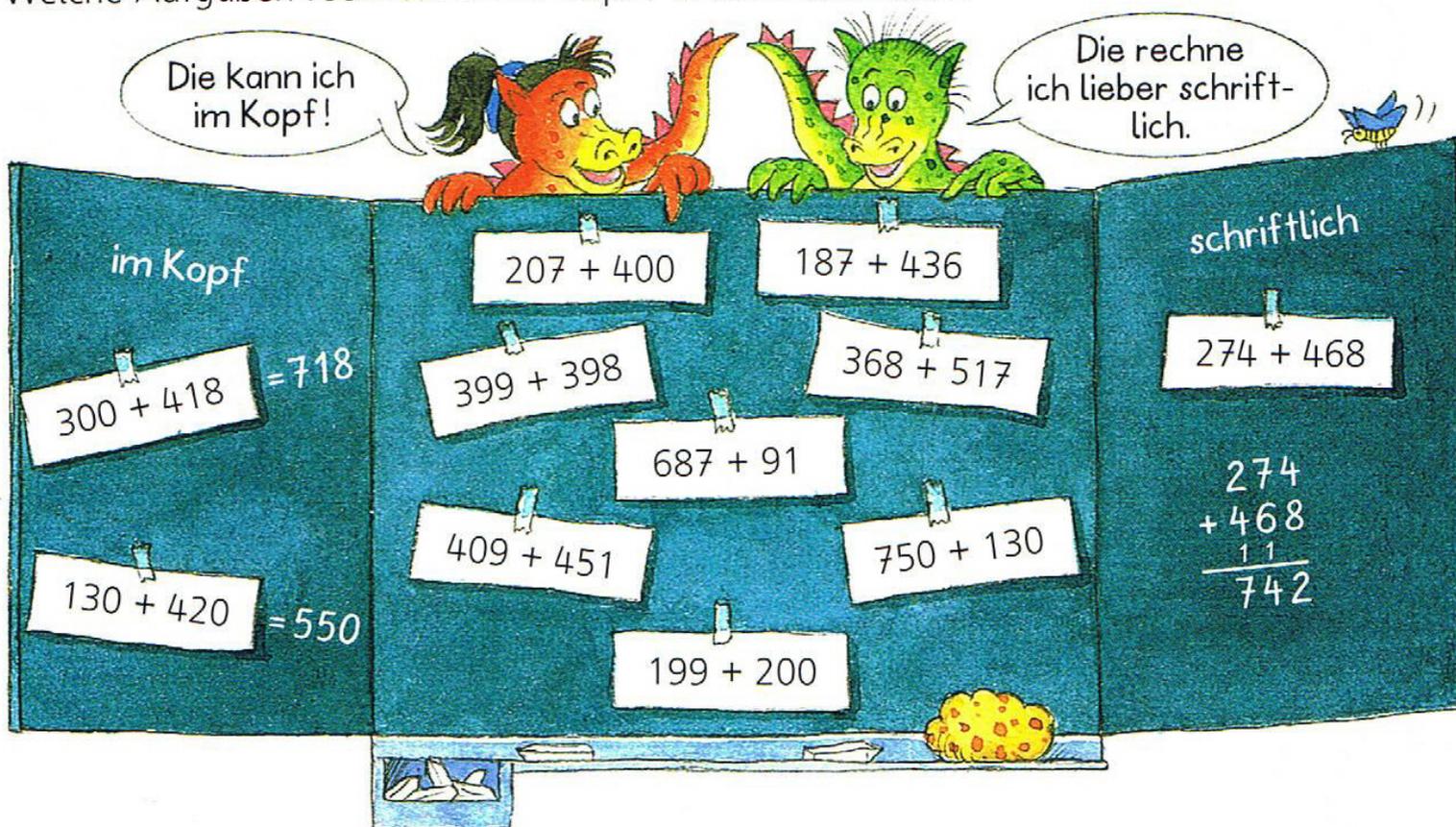
- Betrachtung der 200 Studierenden, die 601 – 598 RICHTIG und IM KOPF bzw. HALBSCHRIFTLICH lösen
 - Das sind weniger als 50 %
 - Davon weniger als die Hälfte über Ergänzen (71 Studenten, 17 %) (höchstens!)
 - Die andere Hälfte über Strategien des Wegnehmens
 - Schrittweises Rechnen
 - Hilfsaufgabe

601 - 598 =
$500 + 90 + 8 = 598$
$601 - 500 = 101$
$101 - 90 = 11$
$11 - 8 = \boxed{3}$

Schriftliche Rechenverfahren I

- Reflexion des schriftlichen Rechnens

Welche Aufgaben rechnest du im Kopf? Welche schriftlich?



Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

Ziel

Ausgehend vom Zahlenmaterial einer Aufgabe (für sich begründet) entscheiden, ob man mündlich oder schriftlich rechnen sollte

1. Kopfrechnen - schriftliches Rechnen

Die Kinder sollen im Unterrichtsgespräch über fünf Beispielaufgaben zur Addition (für sich begründet) entscheiden, ob sie diese im Kopf oder schriftlich rechnen.

1. $278+199$

2. $340+250$

3. $280+200$

4. $138+133$

5. $721+247$

Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

Entscheide selbst: im Kopf oder schriftlich?

- Was ist leichter? Entscheide zuerst. Dann rechne die Aufgabe schriftlich oder im Kopf. Rechne aber mindestens zwei Aufgaben schriftlich und zwei im Kopf!
- 1) $700 + 35$ 6) $500 + 98$
- 2) $249 + 250$ 7) $480 + 370$
- 3) $342 + 98$ 8) $720 + 35$
- 4) $476 + 238$ 9) $235 + 678$
- 5) $589 + 212$ 10) $320 + 460$

Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

- 1) 735
- 2) 499
- 3) 430
- 5) 801
- 6) 598
- 7) 850
- 8) 755
- 10) 780

$$4) \begin{array}{r} 476 \\ +238 \\ \hline 714 \end{array}$$

$$9) \begin{array}{r} 235 \\ +678 \\ \hline 913 \end{array}$$

$$1) 735$$

$$2) 499$$

$$3) \begin{array}{r} 342 \\ +198 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{r} 476 \\ +238 \\ \hline 714 \end{array}$$

$$5) \begin{array}{r} 589 \\ +212 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$6) 598$$

$$7) \begin{array}{r} 480 \\ +370 \\ \hline 850 \end{array}$$

$$8) 755$$

$$9) \begin{array}{r} 678 \\ +235 \\ \hline 913 \end{array}$$

$$10) \begin{array}{r} 320 \\ +460 \\ \hline 780 \end{array}$$

- 1) 700+ 35
- 2) 249+250
- 3) 342+ 98
- 4) 476+238
- 5) 589+212

- 6) 500+ 98
- 7) 480+370
- 8) 720+ 35
- 9) 235+678
- 10) 320+460

Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

3. Warum im Kopf, warum schriftlich?

Schreibe einige Aufgaben auf, die du im Kopf gerechnet hast! Warum hast du die im Kopf gerechnet?

Schreibe einige Aufgaben auf, die du schriftlich gerechnet hast! Warum hast du sie schriftlich gerechnet?

DENISE antworten ⊕
① Es sind die Aufgaben 1, 2, 6, 8 und 10.
Warum: weil sie einfach waren.
② Es sind die Aufgaben 3 und 4.
Warum weil sie etwas schwerer waren.

Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

- 1) Ich habe 7 Aufgaben im Kopfgerechnet aber auch 3 ~~z~~ schriftlich. Ich habe jetzt gemerkt das ~~z~~ es nicht immer geht ist im Kopf zu rechnen.
- 2) Ich finde diese 3 Aufgaben sehr schwer weil ich nicht mit den hohen Zahlen zu recht komme.

Unterrichtsbeispiel im Kopf oder schriftlich ? nach Selter

4. Stelle deine Arbeit anderen Kindern vor.

- Die Kinder präsentieren und diskutieren ihre Vorgehensweisen und ihre Texte.

5.. Schreibe fünf Aufgaben auf, die sich gut für das Kopfrechnen eignen, und fünf Aufgaben, die sich gut für das schriftliche Rechnen eignen

im Kopf

- 1) $200 + 300 = 500$
- 2) $401 + 37 = 438$
- 3) $150 + 140 = 290$
- 4) $127 + 700 = 827$
- 5) $150 + 149 = 299$

schriftlich

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{array}{r} 237 \\ + 588 \\ \hline 825 \end{array}$ | 2) $\begin{array}{r} 478 \\ + 478 \\ \hline 956 \end{array}$ |
| 3) $\begin{array}{r} 483 \\ + 216 \\ \hline 699 \end{array}$ | 4) $\begin{array}{r} 421 \\ + 358 \\ + 107 \\ \hline 886 \end{array}$ |
| 5) $\begin{array}{r} 153 \\ + 264 \\ \hline 417 \end{array}$ | |

Rechenverfahren

Folgerungen nach Selter:

- Stärkung des Zahlenrechnens
- Reflexion über die Angemessenheit von Rechenmethoden (Rechenkonferenzen)
- Entwicklung eines „Zahlenblicks“
- Zwischenformen des Zahlenrechnens fördern
- Stärkung der Subtraktion

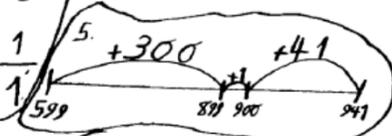
Strategien von Kindern bei $342 + 599$

$342 + 599 =$

1.
$$\begin{array}{r} 342 \\ + 599 \\ \hline 941 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 342 + 599 = 941 \\ 300 + 500 = 800 \\ 40 + 90 = 130 \\ 2 + 9 = 11 \\ \hline 941 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 3599 \\ 899 \\ 939 \\ 941 \end{array} \left. \begin{array}{l} 300 \\ 40 \\ 2 \end{array} \right\}$$



6. $342 + 599 = 941$



7. $342 + 600 = 942 - 1 = 941$

8. $800 + 130 = 930 + 11 = 941$

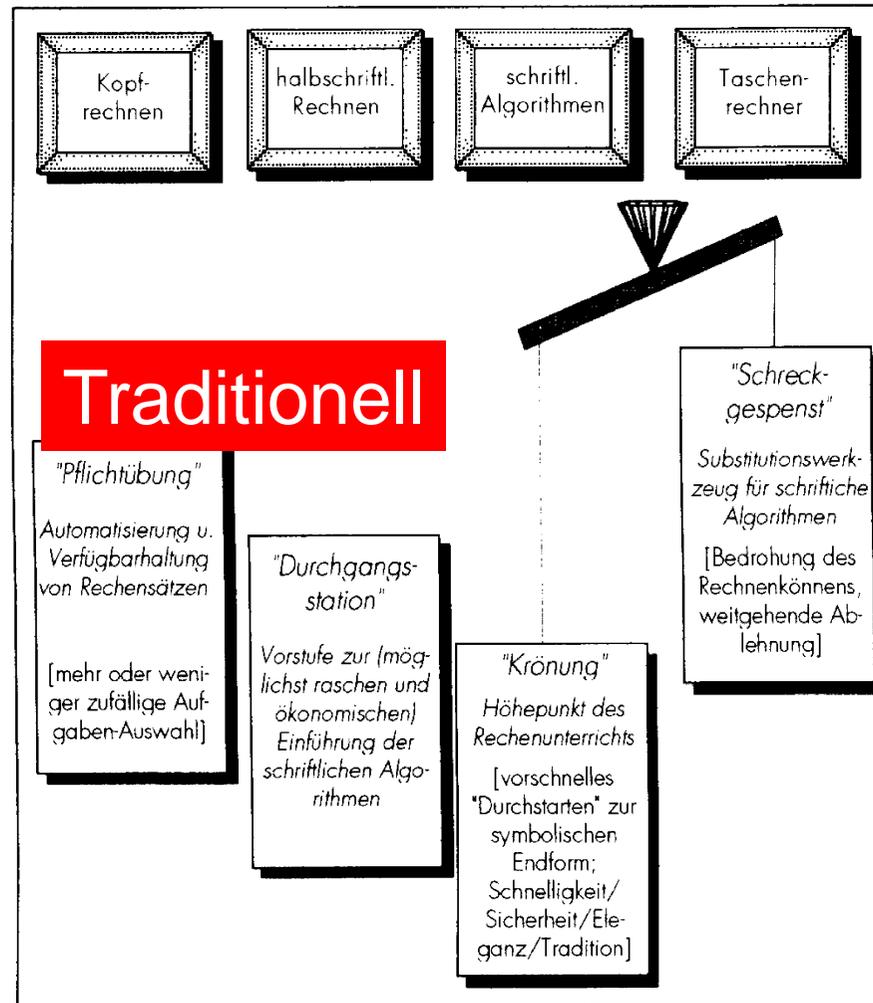
9. $842 + 99 = 941$

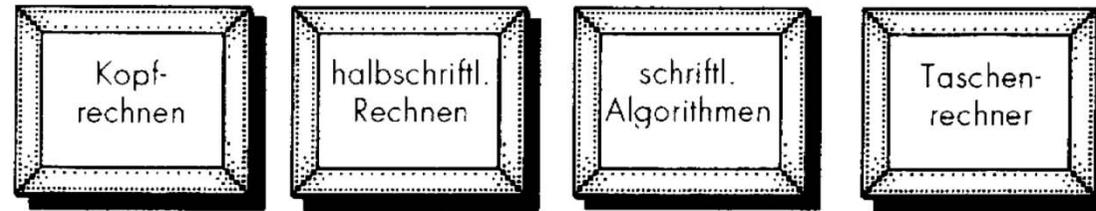
10.
$$\begin{array}{r} 342 + 500 = 842 \\ + 90 = 932 + 9 = 941 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} 800 + 40 = 840 \\ 840 + 90 = 930 \\ 930 + 2 = 932 \\ 932 + 9 = 941 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} 342 + 599 \\ \hline 81311 \\ 800 \\ 130 \\ + 11 \\ \hline 941 \end{array}$$

Stellenwert verschiedener Rechenmethoden





Revidiert

"Grund-
bau-
stein"
"Blitz-
rechnen"
[automa-
tisierte
Rechen-
sätze]

"Zentrum"
Ökonomische Rechnungs-
art für eine Vielzahl von
Rechenanforderungen

[Flexibles, einsichtiges
Ausnutzen von Rechen-
strategien, Vielfalt von
Lösungswegen]

"Abrundung"
"Abrundung"
Eine Rechnungsart
unter mehreren

[Ergeben sich
leicht aus dem
kognitiven Netz
halbschriftlicher
Rechenerfahrungen]

"Hilfsmittel"
... unter dem
Primat der
Didaktik

[kein "Rechenver-
meidungs-" oder
"Rechenver-
drängungsgerät"]

Rechenverfahren

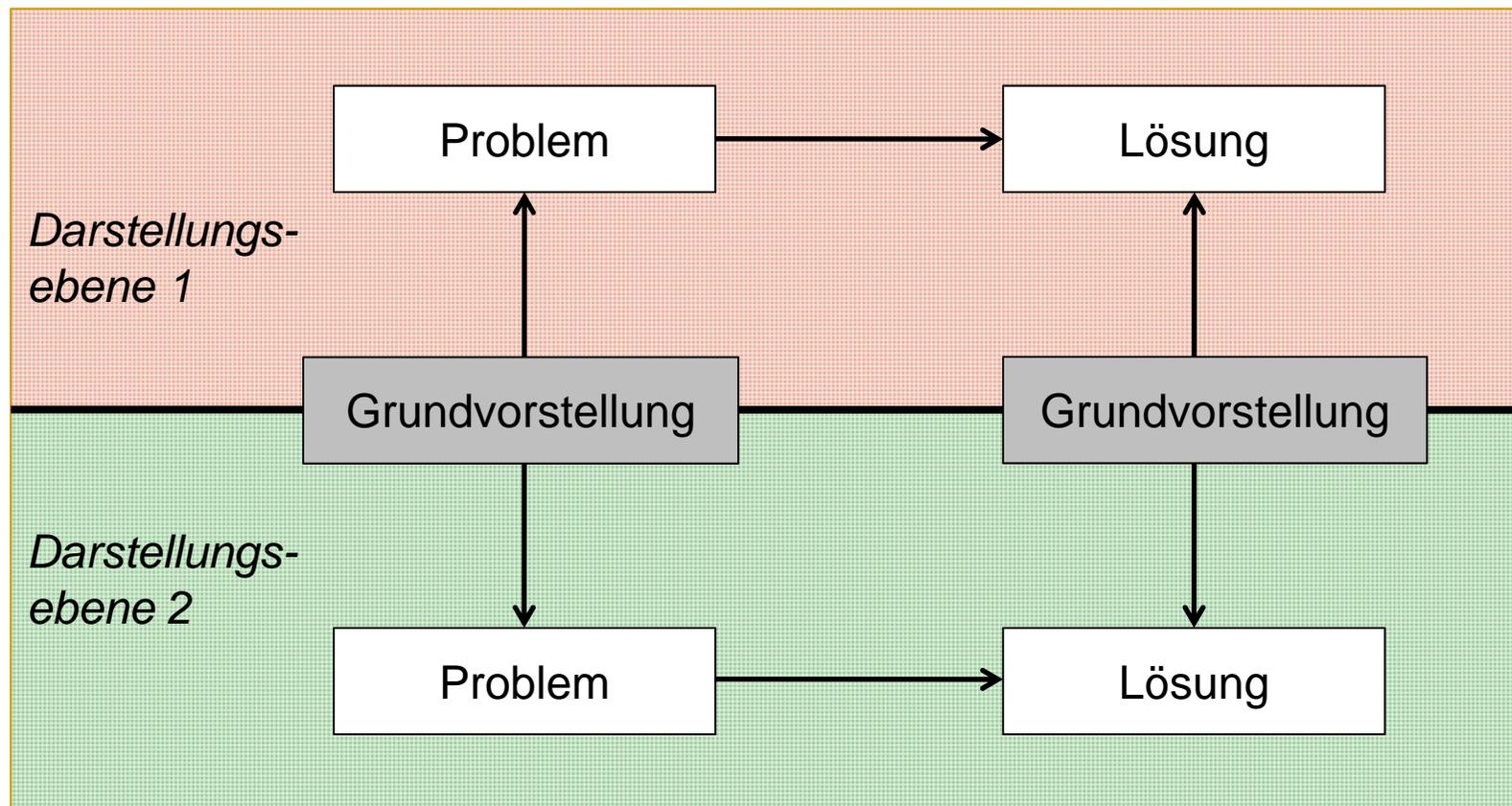
Folgerungen nach Selter:

- Stärkung des Zahlenrechnens
- Reflexion über die Angemessenheit von Rechenmethoden (Rechenkonferenzen)
- Entwicklung eines „Zahlenblicks“
- Zwischenformen des Zahlenrechnens fördern
- Stärkung der Subtraktion

Rechenstrategien

- Zusammenfassung Strategien Addition & Subtraktion
 - Schrittweise
 - Stellenwerte Extra
 - Ziffernweise Extra
 - Mischform
 - Verdoppeln / Halbieren nutzen
 - Gegensinniges / Gleichsinniges Verändern
 - Hilfsaufgaben

Grundvorstellungen



Subtrahirn

- So geht's:

ADAM RIES.

Schreibe wie du eine Zahl von der andern nimmest
fort/Thu ihm also/ Setze oben die Zahl/ davon
du nimmest wilt/ vnd die du abnimmest wilt/ gleich
darunter/ wie im Summiren.

Darnach mach ein Linien darunter/ vnd
heb zu forderst an/ wie im Addiren/ Nimm die er-
ste der vndersten Zahl/ von der ersten Figur/ der
obersten Zahl/ was dann bleibt/ setze vnden. Dar-
nach nim die ander Figur der vndern Zahl/ von
der andern der obersten Zahl/ was bleibet/ setze
auch vnden. Magstu aber die vnder Figur/ von
der obern nicht nimmest/ so nim sie von zehen/
Zum bleibenden gib die ober/ vnd setze gleich vn-
der die einen/ was kompt. Darnach addir eine
der nechsten vndern Figuren/ gegen der linken
Handt/ vnd subtrahir fort bis zum end/ wie fol-
get:

89674	79864	30000
63521	67876	12345
<hr/>		
26153	11988	17655

Schriftliche Rechenverfahren I

Zur Erinnerung

- ... das schriftliche Rechnen kann Kinder „blind“ machen für andere Verfahren und Rechenwege
- ... das schriftliche Verfahren ist aber nicht generell der beste Lösungsweg
- ... „Preis-Nutzen-Verhältnis“ ist ungünstig
Nutzen: schnelle, meist richtige Lösungen
Preis: Unverständnis der ganzheitlichen Lösungsansätze

Schriftliche Rechenverfahren I

Rechnen Sie:

$$\begin{array}{r} 357 \\ + 246 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 512 \\ - 257 \\ \hline \end{array}$$

- Erklären Sie die Bedeutung der „kleinen Einsen“.

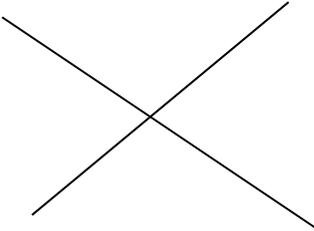
Schriftliche Rechenverfahren I

- Schriftliche Subtraktion
- Es gibt fünf unterschiedliche Möglichkeiten schriftlich zu subtrahieren.
- Grundsätzlich zu unterscheiden sind solche Verfahren bei denen abgezogen wird von solchen, bei denen ergänzt wird.
- Parallel gibt es noch drei verschiedene Möglichkeiten mit dem Übertrag umzugehen.

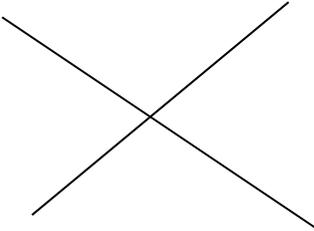
Schriftliche Rechenverfahren I

- Schriftliche Subtraktion
- Beim Abziehen rechnet man „von oben nach unten“.
- Beim Ergänzen rechnet man „von unten nach oben“.
- Die verschiedenen Behandlungen des Übertrags sind:
 - Entbündeln (Einwechseln)
 - Erweitern (gleichsinniges Verändern)
 - Auffüllen (Tacho weiterdrehen)

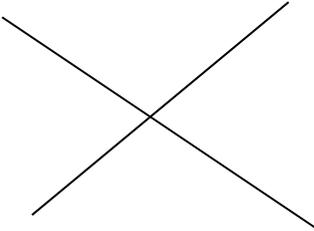
Schriftliche Rechenverfahren I

Stellenübergang Rechenrichtung	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen			
Ergänzen			

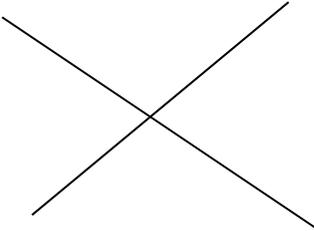
Schriftliche Rechenverfahren I

Stellenübergang Rechenrichtung	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	2E - 7E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 12E - 7E. 5Z - 8Z geht nicht...		
Ergänzen			

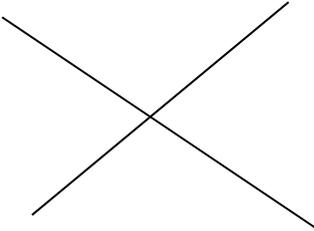
Schriftliche Rechenverfahren I

<div style="text-align: right;">● Stellenübergang</div> <div style="text-align: left;">Rechenrichtung</div>	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	2E - 7E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 12E - 7E. 5Z - 8Z geht nicht...	2E - 7E geht nicht. Erweitere oben mit 10E und unten mit 1Z. Rechne 12E - 7E. 6Z-9Z geht nicht...	
Ergänzen			

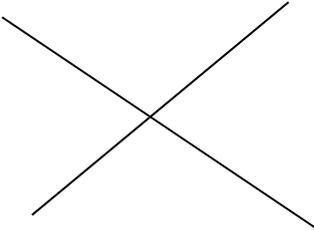
Schriftliche Rechenverfahren I

<div style="text-align: right;">● Stellenübergang</div> <div style="text-align: left;">Rechenrichtung</div>	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	2E - 7E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 12E - 7E. 5Z - 8Z geht nicht...	2E - 7E geht nicht. Erweitere oben mit 10E und unten mit 1Z. Rechne 12E - 7E. 6Z-9Z geht nicht...	
Ergänzen	7E+__=2E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 7E+ <u>5E</u> =12E 8Z+__=5Z geht nicht...		

Schriftliche Rechenverfahren I

<div style="text-align: right;">● Stellenübergang</div> <div style="text-align: left;">Rechenrichtung</div>	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	2E - 7E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 12E - 7E. 5Z - 8Z geht nicht...	2E - 7E geht nicht. Erweitere oben mit 10E und unten mit 1Z. Rechne 12E - 7E. 6Z-9Z geht nicht...	
Ergänzen	7E+__=2E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 7E+ <u>5E</u> =12E 8Z+__=5Z geht nicht...	7E+__=2E geht nicht. Erweitere oben mit 10E unten mit 1Z. Rechne 7E+ <u>5E</u> =12E 9Z+__=6Z geht nicht...	

Schriftliche Rechenverfahren I

<div style="text-align: right;">● Stellenübergang</div> <div style="text-align: left;">Rechenrichtung</div>	Entbündeln	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	2E - 7E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 12E - 7E. 5Z - 8Z geht nicht...	2E - 7E geht nicht. Erweitere oben mit 10E und unten mit 1Z. Rechne 12E - 7E. 6Z-9Z geht nicht...	
Ergänzen	7E+__=2E geht nicht. Entbündele 1Z zu 10E. Rechne 7E+ <u>5E</u> =12E 8Z+__=5Z geht nicht...	7E+__=2E geht nicht. Erweitere oben mit 10E unten mit 1Z. Rechne 7E+ <u>5E</u> =12E 9Z+__=6Z geht nicht...	7E+ <u>5E</u> =12E, das sind die geforderten 2E, und 1Z in der nächsten Spalte. 9Z+ <u>7Z</u> =16Z ...

Schriftliche Rechenverfahren I

- Schriftliche Subtraktion
- Auffüllen (Zahlenbuch, 3. Schuljahr)

Schriftliche Subtraktion

Zählerstand alt



Zählerstand neu



H	Z	E
4	3	9

 $\xrightarrow{+8E}$

H	Z	E
4	4	7

 $\xrightarrow{+2Z}$

H	Z	E
4	6	7

 $\xrightarrow{+1H}$

H	Z	E
5	6	7

H	Z	E
5	6	7
-	4	3
		9
	1	
1	2	8

Differenz

1

H	Z	E
5	6	7
-	4	3
		9

H	Z	E
5	6	7
-	4	3
		9
		1
1	2	8

— Differenz

Ergänze erst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter. Achte auf die Überträge.

Sprich: $9 + 8 = 17$ Schreibe 8, übertrage 1.
 $4 + 2 = 6$ Schreibe 2.
 $4 + 1 = 5$ Schreibe 1.

Schriftliche Rechenverfahren I

Einführung des Verfahrens mit Material

- Mehrsystemblöcke (Dienes-Material)
- Geld
- Stellenwerttafel

Schriftliche Rechenverfahren I

Einführung des Verfahrens mit Material

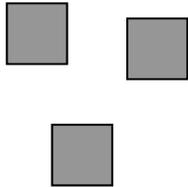
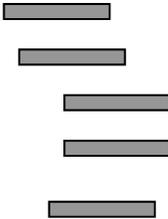
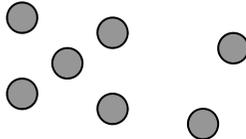
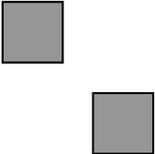
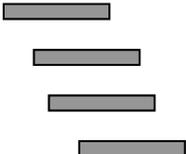
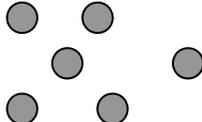
- Finden Sie eine Rechengeschichte zu $357 + 246$
- Die Spielhandlung soll bei NOTATION DER HANDLUNG den schriftlichen Algorithmus ergeben
- „Spielen“ Sie am Material und notieren Sie.

$$\begin{array}{r} 357 \\ + 246 \\ \hline \end{array}$$

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

+

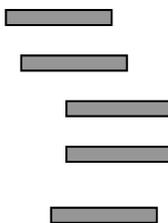
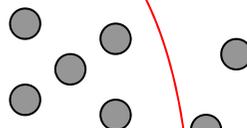
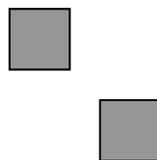
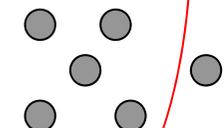
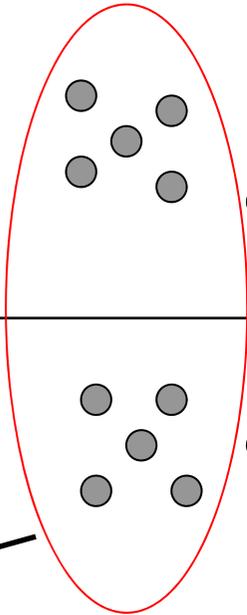
		
		

+

3	5	7
2	4	6

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

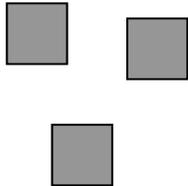
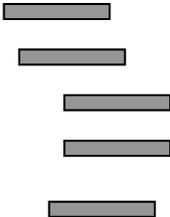
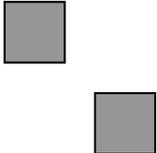
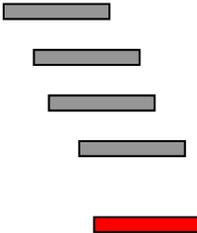
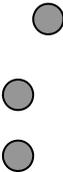
		
+	 	
		

3	5	7
2	4	6

+

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

		
+		
		

	3	5	7
	2	4	6
+			

Schriftliche Rechenverfahren I

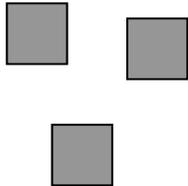
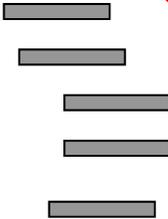
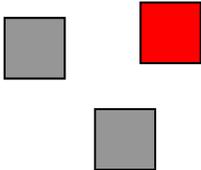
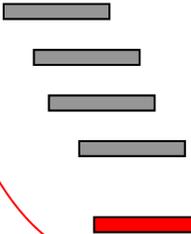
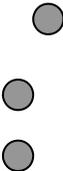
Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

+		

	3	5	7
	2	4	6
		1	
			3

Schriftliche Rechenverfahren I

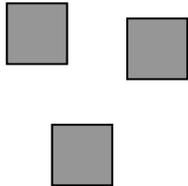
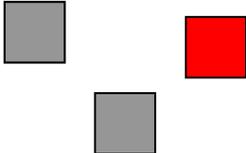
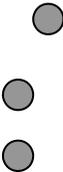
Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

	3	5	7
+	2	4	6
		1	
			3

Schriftliche Rechenverfahren I

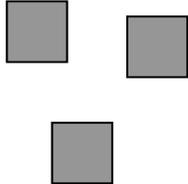
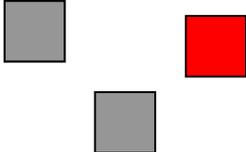
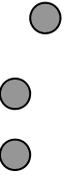
Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

		
+		
<hr/>		
		

	3	5	7
	2	4	6
		1	
			3

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

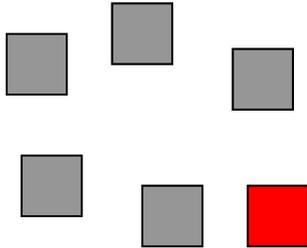
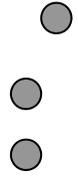
		
 		
		

3	5	7
2	4	6
	1	1
	0	3

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

+

Sebastian War

	3	5	7
	2	4	6
+	1	1	
		0	3

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
357 €
Maria hat
246 €
Zusammen?

+

Sebastian War

	3	5	7
+	2	4	6
	1	1	
	6	0	3

Das Gleiche nun mit der Subtraktionsaufgabe

$$\begin{array}{r} 512 \\ - 257 \\ \hline \end{array}$$

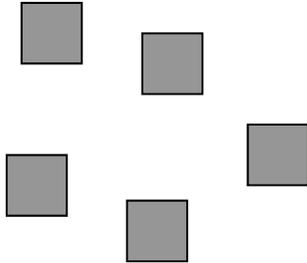
- 1) Finden Sie einen passenden Sachkontext
- 2) Handeln Sie in dem gewählten Kontext nach der Strategie der schriftlichen Subtraktion und finden Sie die Lösung

Schriftliche Rechenverfahren I

- Die beiden gängigsten Verfahren sind das „Abziehen mit Entbündeln“ und das „Ergänzen mit Erweitern“
- Abziehen mit Entbündeln kann gut handelnd (enaktiv) veranschaulicht werden.

Schriftliche Rechenverfahren I

-

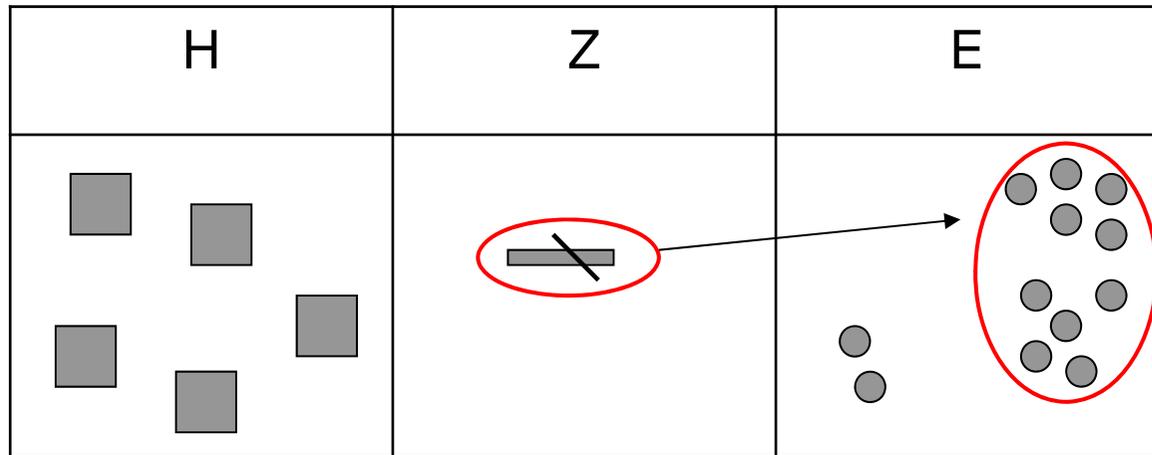
H	Z	E
		

5	1	2
2	5	7

-

Schriftliche Rechenverfahren I

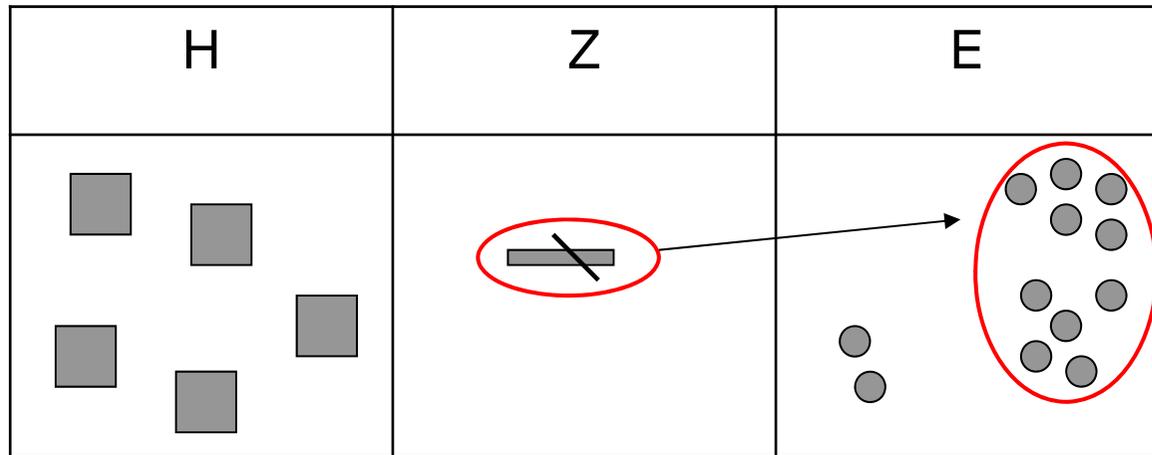
-



5	1	2
2	5	7

Schriftliche Rechenverfahren I

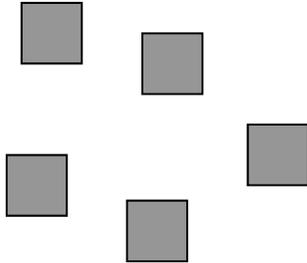
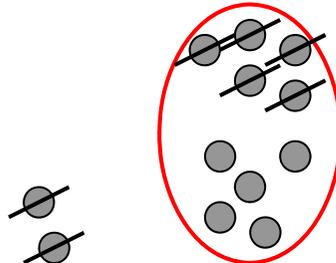
-



		10
5	1'	2
2	5	7

Schriftliche Rechenverfahren I

-

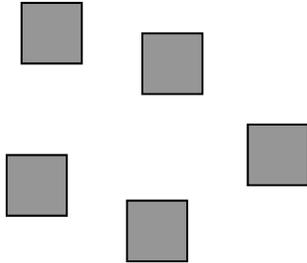
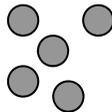
H	Z	E
		

		10
5	1'	2
2	5	7

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

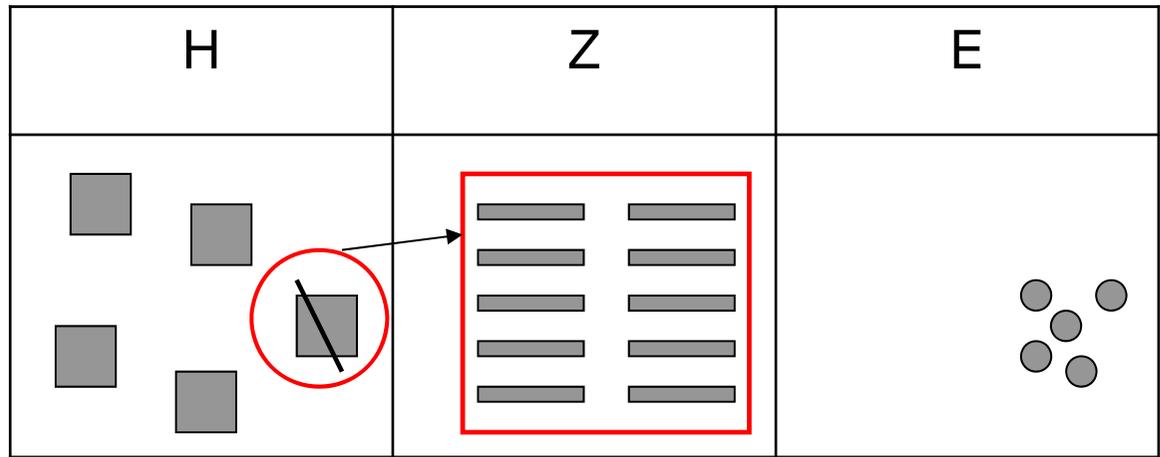
H	Z	E
		

		¹⁰
5	1'	2
2	5	7
		5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

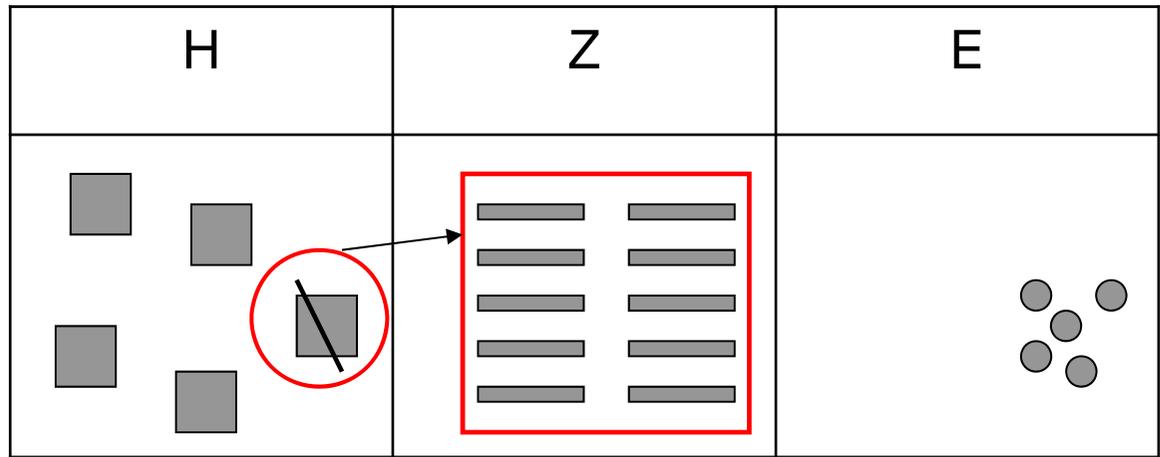


		10
5	1'	2
2	5	7
		5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

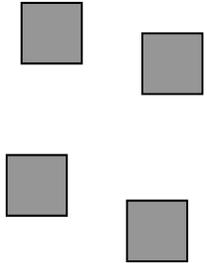
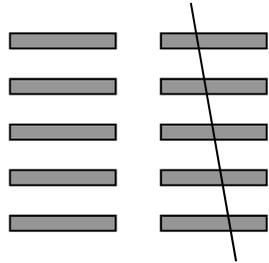
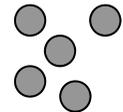


	10	10
5'	1'	2
2	5	7
		5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

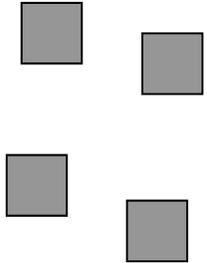
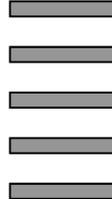
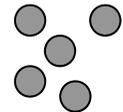
H	Z	E
		

	10	10
5'	1'	2
2	5	7
		5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

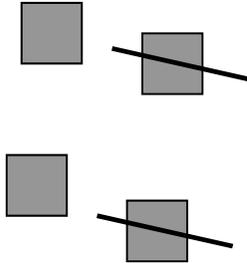
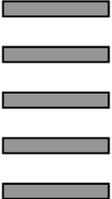
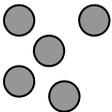
H	Z	E
		

	10	10
5'	1'	2
2	5	7
	5	5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

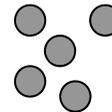
H	Z	E
		

	10	10
5'	1'	2
2	5	7
	5	5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

-

H	Z	E
		

	10	10
5'	1'	2
2	5	7
2	5	5

-

Schriftliche Rechenverfahren I

- Weitere Notationsform beim Entbündeln:

	5	1	2
-	2	5	7

Schriftliche Rechenverfahren I

- Weitere Notationsform beim Entbündeln:

		10
	5	10 2
-	2	5
		7
		5

Schriftliche Rechenverfahren I

- Weitere Notationsform beim Entbündeln :

	5 4	10	10
		1 0	2
-	2	5	7
		5	5

Schriftliche Rechenverfahren I

- Weitere Notationsform beim Entbündeln :

	5 4	10	10
		1 0	2
-	2	5	7
	2	5	5

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
512 €
Maria hat
257 €
Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
 512 € **522 €**
 Maria hat
 257 € **267 €**
 Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7
		1	

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat
 512 € **522 €**
 Maria hat
 257 € **267 €**
 Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7
		1	
			5

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat **622 €**
 512 € **522 €**

Maria hat **367 €**
 257 € **267 €**

Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7
	1	1	
			5

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat 622 €
512 €

Maria hat 367 €
257 €

Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7
	1	1	
		5	5

Schriftliche Rechenverfahren I

Max hat 622 €
512 €

Maria hat 367 €
257 €

Unterschied?

	5	1	2
+	2	5	7
	2	5	5

Schriftliche Rechenverfahren I

- Ausführliche Notation beim Erweitern:

	5	1	2
-	2	5	7

Schriftliche Rechenverfahren I

- Ausführliche Notation beim Erweitern:

		10
	5	1
	2	5 ₁
-	2	7
		5

Schriftliche Rechenverfahren I

- Ausführliche Notation beim Erweitern:

		10	10
	5	1	2
-	2 ₁	5 ₁	7
		5	5

Schriftliche Rechenverfahren I

- Ausführliche Notation beim Erweitern:

$$\begin{array}{r} \\ \\ - \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 10 & 10 \\ \hline 5 & 1 & 2 \\ \hline & & \\ \hline 2_1 & 5_1 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Schriftliche Rechenverfahren I

- Verfahren im Vergleich

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern	Auffülltechnik
Rechenrichtung und Sachkontext	Natürliche Sinnggebung der Subtraktion (Weggeben, Abziehen, Entfernen)	Spezifischer Sach-kontext mit deutlich weniger Anwendungs-bereichen (Vergleichen, Ergänzen) Gegenargument: Stärkung des Ergänzens in den ersten beiden Schuljahren	Spezifischer Sach-kontext mit deutlich weniger Anwendungs-bereichen (Auffüllen, Ergänzen)

Schriftliche Rechenverfahren I

- Verfahren im Vergleich

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern	Auffülltechnik
Notationsform	erscheint auf den ersten Blick unübersichtlich (mindestens in der Form der Einführung)	Erreichen der Endform mit einem Zwischenschritt	Die Endform wird schon bei der Einführung erreicht.

Schriftliche Rechenverfahren I

- Verfahren im Vergleich

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern	Auffülltechnik
Behandlung des Übertrags	Entspricht dem Alltagskontext beim Herausgeben von Geld; das Bündeln und Entbündeln ist den Kinder vertraut, kann im Unterricht konkret (bzw. in der Vorstellung) durchgeführt werden.	Das Gesetz von der Konstanz der Differenz bei gleichsinniger Veränderung ist schwer verständlich. Das Erweitern wird auch in Schulbüchern als „Trick“ dargestellt.	Das Verfahren kann konkret handelnd kaum erarbeitet werden. Das Plättchenmodell ist unverständlich; das Kilometerzählermodell entspricht kaum noch dem Erfahrungsbereich der Kinder.

Schriftliche Rechenverfahren I

- Verfahren im Vergleich

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern	Auffülltechnik
Besondere Schwierigkeiten	<ul style="list-style-type: none">- Minuend mit vielen Nullen- mehrere Subtrahenden	<ul style="list-style-type: none">- Interferenzprobleme mit der Addition- Verfahren kann nur äußerst schwer auf Verständnisgrundlage rekonstruiert werden.	<ul style="list-style-type: none">- Interferenzprobleme mit der Addition- Verfahren kann nur schwer auf Verständnisgrundlage rekonstruiert werden.

Schriftliche Rechenverfahren I

- Verfahren im Vergleich

	Abziehen mit Entbündeln	Ergänzen mit Erweitern	Auffülltechnik
Besondere Schwierigkeiten	- Minuend mit vielen Nullen - mehrere Subtrahenden	- Interferenzprobleme mit der Addition - Verfahren kann nur äußerst schwer auf Verständnisgrundlage rekonstruiert werden.	- Interferenzprobleme mit der Addition - Verfahren kann nur schwer auf Verständnisgrundlage rekonstruiert werden.
Verständnis für das Verfahren	Kinder können das Verfahren tatsächlich verstehen.	Kaum ein Kind kann das Verfahren erklären.	Kaum ein Kind kann das Verfahren erklären.

Schriftliche Rechenverfahren I

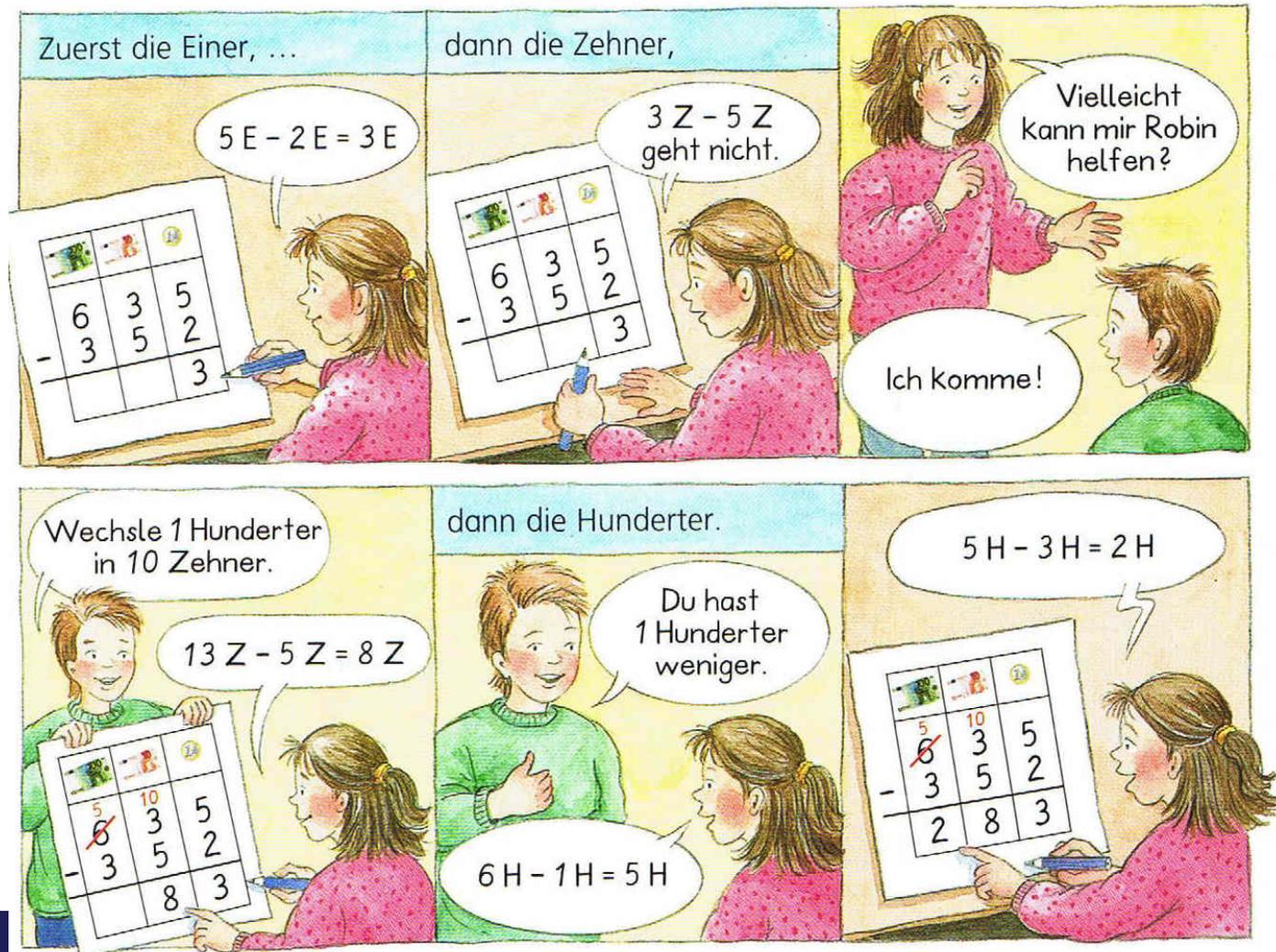
- Schriftliche Subtraktion
- Welches Verfahren (Welt der Zahl, 3. Schuljahr)



Schriftliche Rechenverfahren I

- Welches Verfahren?

Frau Knoke hat 635 €. Sie kauft einen Rasenmäher für 352 €. Wie viel Euro hat sie noch übrig?



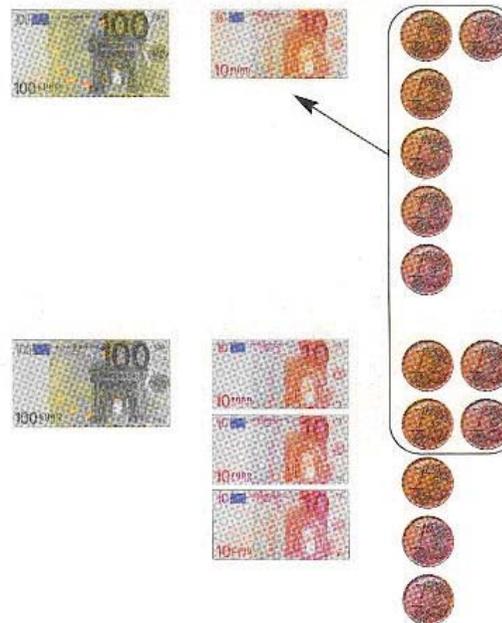
Schriftliche Rechenverfahren I

- Welches Verfahren?

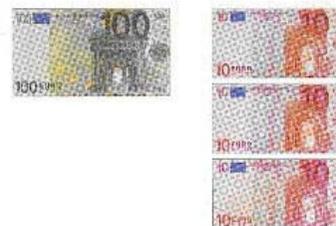
1 Lege mit Münzen und Scheinen. Schreibe in dein Heft. Subtrahiere.



Angespart:



Gibt dazu:



	H	Z	E
	2	5	3
-	1	1	6
<hr/>			
	1	3	7

a)

	H	Z	E
	3	2	7
-		1	8
<hr/>			

c)

	H	Z	E
	5	4	3
-		9	1
<hr/>			

e)

	H	Z	E
	4	1	1
-	1	8	2
<hr/>			

2 Subtrahiere.

In den Wind geschrieben

Sieh dir das Muster an: Ziehe erst die Einer voneinander ab. Wenn die obere Ziffer kleiner ist als die, die du abziehst, gibt es einen Trick. Zähle 10 hinzu: $12 - 4 = 8$. Die 8 schreibst du unter die Einerspalte. Den geborgten Zehner trägst du als Übertrag in die Zehnerspalte ein.

Rechne weiter, wie es das Beispiel zeigt.

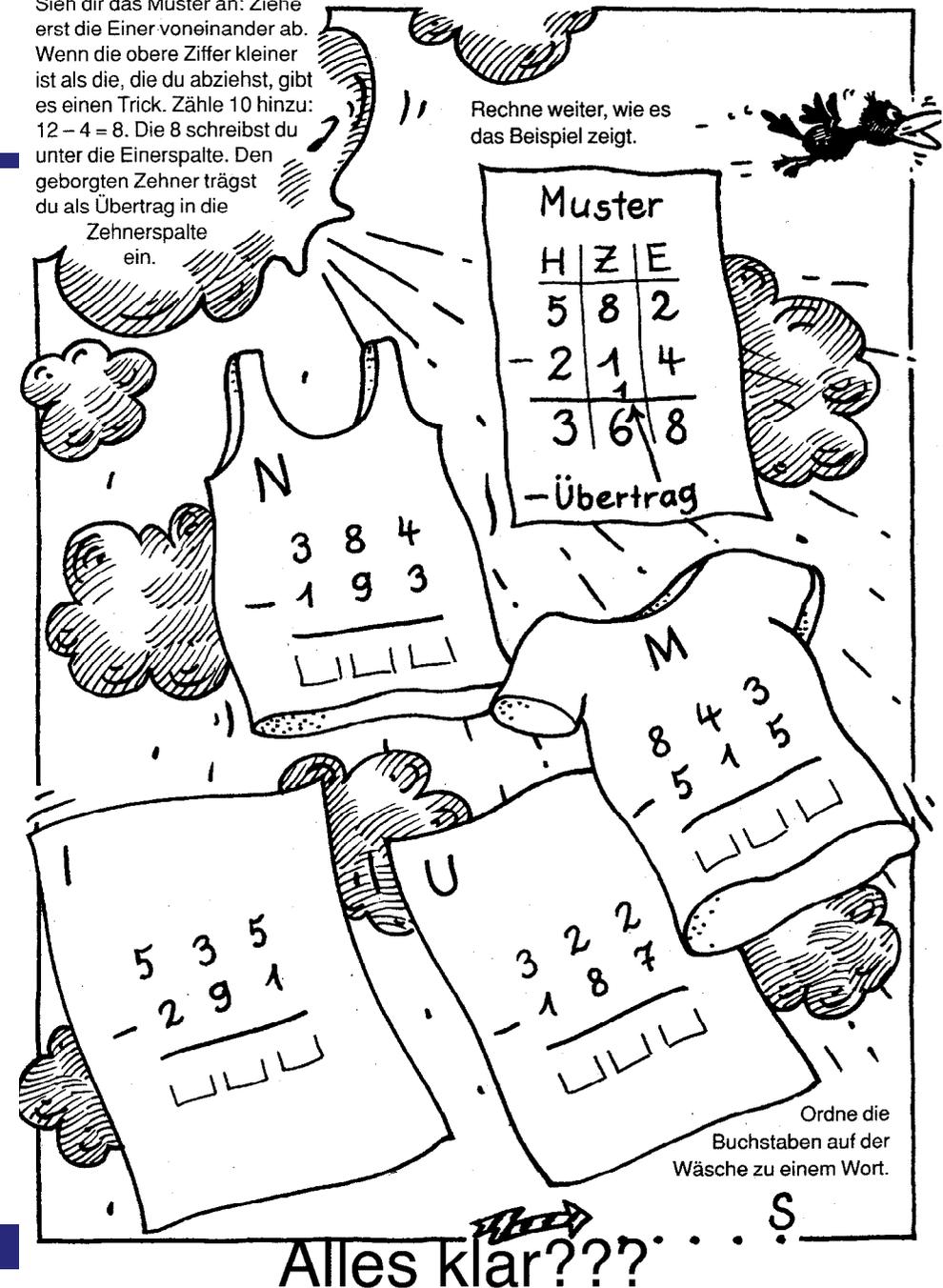
Muster

H	Z	E
5	8	2
-	2	1 4
3	6	8
- Übertrag		

Welches Verfahren?

Ziehe erst die Einer voneinander ab. Wenn die obere Ziffer kleiner ist als die, die du abziehst, gibt es einen Trick. Zähle 10 hinzu: $12 - 4 = 8$. Die 8 schreibst du unter die Einerspalte. Den geborgten Zehner trägst du als Übertrag in die Zehnerspalte ein.

(Neue Ensslin-Rechenspiele 2, S. 30).

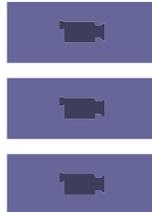


Ordne die Buchstaben auf der Wäsche zu einem Wort.

Rechenverfahren

Eigene Beobachtungen...

- Frau Berger 601 - 598
- Frau Berger 526 - 497
- Frau Berger 701 - 436



Schriftliche Rechenverfahren I

- Rechnen Sie folgende Aufgabe jeweils mit einem Entbündelungsverfahren und mit einem Erweiterungsverfahren.
- $1\ 040\ 020 - 753\ 874$
- Notieren Sie, an welchen Stellen im Rechenprozess sie Probleme erkennen.

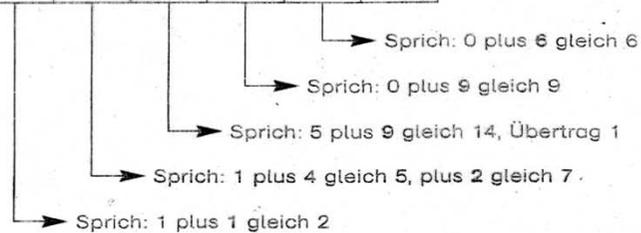
Mentor Lernhilfen

Damit du aber nicht jedes Mal eine neue Rechnung schreiben musst, machst du das natürlich nur in Gedanken.

Den Tausender, den du dir genommen hast, schreibst du als Übertrag klein unten hin, damit du nicht vergisst ihn abzuziehen.

Und hier die Aufgabe:

ZT	T	H	Z	E	
2	7	4	9	6	l
-1	4 ₁	5 _~	0	0	l
1	2	9	9	6	l



Aufgaben



Jetzt versuchen wir es wieder ohne Stellenwerttafel:

① a	2	7	1	8	6	② b	3	2	6	8	7	③ c	1	2	5	8	7	6		
	-		2	3	3	5		-		5	4	3		-		1	7	2	7	4

Gut gemacht!

Schriftliche Rechenverfahren I

- Übungen zum schriftlichen Rechnen
- Klecksaufgaben

$$+ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 7 \\ \hline & 6 & 4 \\ \hline 7 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Schriftliche Rechenverfahren I

Übungen mit Ziffernkarten

Wer schafft die 500?

Ziffernkarte ziehen und gleich ablegen.

Das ganze sechsmal.

Ausrechnen.
Schaffst du es noch näher?

	H	Z	E

Schriftliche Rechenverfahren I

Übungen mit Ziffernkarten

Wer schafft die 500?

Kannst du die Ziffernkarten
so umlegen, dass du
noch näher an 500
kommst?

	H	Z	E
	3	2	7
+	1	6	0

Schriftliche Rechenverfahren I

Übungen mit Ziffernkarten

Große und kleine Zahlen

Ziehe sechs Ziffern.

Lege sie in die oberen sechs Felder:

Versuche ganz
kleine und ganz große
Zahlen rauszukriegen.

	H	Z	E

Schriftliche Rechenverfahren I

Übungen mit Ziffernkarten

Suche 6 Ziffernkärtchen aus und verteile sie so, dass das Ergebnis möglichst klein ist.

	H	Z	E
-			

Schriftliche Rechenverfahren I

Übungen mit Ziffernkarten

Super-Knobel

Lege die Ziffernkarten von 1 bis 9 so auf die neun Felder der Minusaufgabe, damit die Rechnung stimmt.

	H	Z	E
-			