# Auf dem Weg zur schriftlichen Multiplikation

## Kinder reflektieren Zusammenhänge

Kirsten Winkel

**Im Beitrag werden Zwischenschritte auf dem Weg zum schriftlichen Verfahren aufgezeigt, die auf den ersten Blick recht schwierig erscheinen mögen, sich aber in der Praxis sowohl für leistungsstarke als auch für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler als sehr Gewinn bringend zum Verständnis der schriftlichen Multiplikation herausstellen.**

Zwei klitzekleine Fehler beim schriftlichen Multiplizieren und schon hat das Ergebnis keinerlei Ähnlichkeit mehr mit der korrekten Lösung:

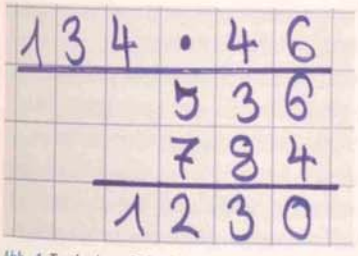



*Abb. 1 Typischer Schülerfehler*

„Falsch. Leider 0 Punkte für diese Aufgabe." Selbstverständlich ist das heute nicht mehr alles, was wir dem Schüler, der diese Aufgabe gerechnet hat, als Feedback geben. Wir gehen einen Schritt weiter und machen in Julians Lösung einen Stellenwertfehler und einen Übertragsfehler beim Multiplizieren ausfindig. Ein Dialog könnte folgen:

> „Denk an die Null am Anfang! Du weißt doch: Sonst wird das Ergebnis ganz falsch." – „Ach ja." – „Und guck mal hier unten bei der Acht, was hast du hier vergessen?" – „Hm, uups, die Zwei im Kopf. Da muss 'ne Null hin." – „Denkst du nächstes Mal dran? Oder sollen wir das noch mal üben? So lange ist es doch noch nicht her, dass wir das rauf und runter geübt haben. Da konntest du das doch alles." – „Mmh. Stimmt."

Genauso sicher, wie dieser Schüler das Verfahren nach dem erneuten Üben dann doch wieder anwenden kann, genauso sicher kann dieses Wissen nach weiteren zwei Monaten wieder verschwunden sein. Und doch kann es eigentlich nicht so schwierig sein! Schließlich handelt es sich beim schriftlichen Multiplizieren um eine Aufgabe, die – entsprechend den Bildungsstandards – unbestritten dem Anforderungsbereich „Reproduzieren" (AB I) entspricht (KMK 2004). Auch wenn es sich „nur" um den Anforderungsbereich I handelt, sollten wir einmal die Fragen stellen:

- Ist uns Mathematik-Unterrichtenden denn wirklich klar, was bei der schriftlichen Multiplikation überhaupt passiert und warum sie genau so funktioniert, wie wir sie gelernt haben?
- Welche Rechengesetze werden ausgenutzt?
- Haben wir eine bildliche Vorstellung davon, wie der Term in dem Verfahren zerlegt wird?

Ausgehend von der Darstellung einer großen Malaufgabe am Punktefeld, die uns von kleinen Multiplikationsaufgaben bekannt ist, möchte ich nun einen Weg aufzeigen, der einen möglichst fließenden Übergang von dieser ikonischen Darstellung zum schriftlichen Rechenverfahren bietet. Leistungsstärkere Schüler/innen können dabei über Zusammenhänge der verschiedenen Darstellungen reflektieren, und gleichzeitig lernen leistungsschwächere Kinder ein Verfahren kennen, das sie für die Multiplikation großer Zahlen begeistert und das ihnen hilft, das nachfolgende schriftliche Verfahren besser zu verstehen. Dieser Weg entspricht dem im niedersächsischen Kerncurriculum formulierten Anspruch, „individuelle Zugänge auf unterschiedlichen Anspruchniveaus", (Nds. Kultusministerium, 8) zu ermöglichen.

### Schriftliches Multiplizieren verstehen

Der Weg, den ich mit Viertklässlern beschritten habe, wird nachfolgend über mehrere Zwischenschritte skizziert. Ausgehend von einer Darstel-

lung, wie sie die Kinder schon aus dem zweiten Schuljahr kennen, sind die Schritte so angelegt, dass der Übergang zur nächsten Darstellung möglichst augenfällig ist und dem schriftlichen Verfahren jedes Mal ein Stück näher kommt. Die Aufgabenstellung für meine Schülerinnen und Schüler war bei jedem Schritt sehr ähnlich angelegt: Nach der Einführung einer neuen Darstellungsform für eine Multiplikationsaufgabe sollten sie zunächst durch farbiges Markieren Zusammenhänge zu den vorherigen Darstellungen entdecken. In den jeweils anschließenden Rechenkonferenzen lag der Schwerpunkt auf den in den Bildungsstandards geforderten allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Argumentieren" und „Kommunizieren". So konnten die Kinder beim Entdecken von Zusammenhängen Vermutungen äußern, nach Begründungen suchen und ihr Verständnis überprüfen, bevor sie jeweils in vertiefenden Übungen die Vorteile der neuen Darstellung zu schätzen lernten.

In der Kürze meiner Ausführungen möchte ich die einzelnen Schritte am Beispiel ein und derselben Multiplikationsaufgabe darstellen und erläutern. Dabei sollen Sie, liebe Leserinnen und Leser, die Gelegenheit haben, die Zusammenhänge zwischen den Darstellungen der Multiplikationsaufgaben selbst zu entdecken. (vgl. auch Wittmann/Müller 2005)

### 1. Darstellung am Punktefeld

Aus dem zweiten Schuljahr kennen die Schülerinnen und Schüler die bildliche Darstellung einer Malaufgabe als Punktefeld. Auch im außerschulischen Alltag finden sie Malaufgaben in dieser Form: Vom Eierkarton über das Vier-Gewinnt-Spielfeld bis hin zu den Fenstern an Hochhäusern. Im dritten Schuljahr haben wir entsprechend dem Spiralprinzip dieselbe Darstellung am Vierhunderterfeld wieder aufgegriffen, um Aufgaben des großen Einmaleins geeignet in Teilaufgaben zu zerlegen.

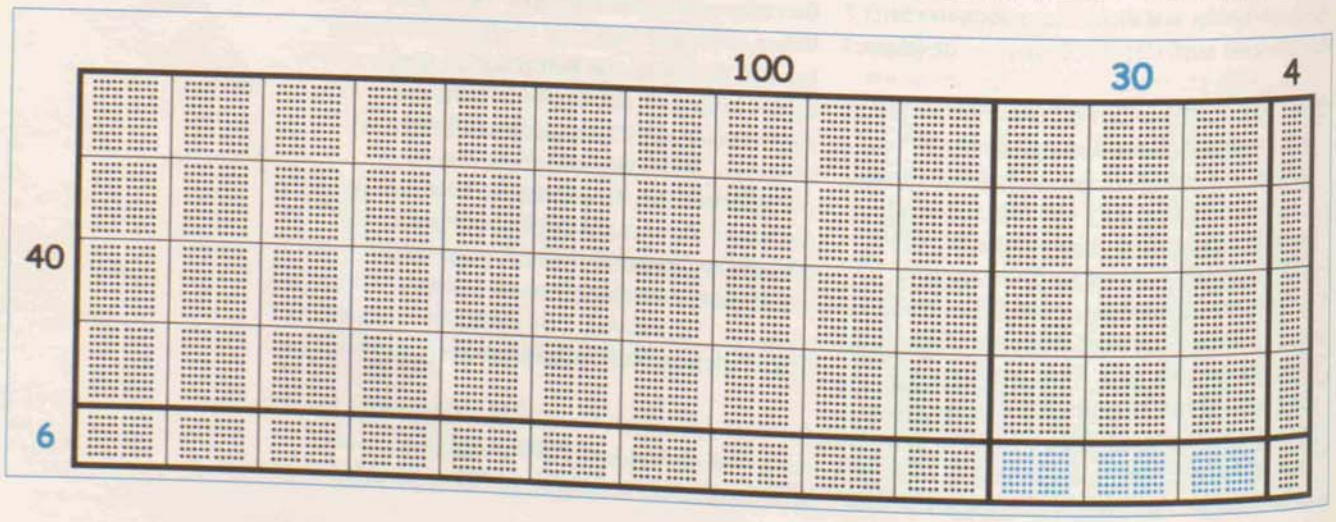
Nutzen wir nun diese Vorkenntnisse aus dem Einmaleins und der Lebenswirklichkeit der Kinder und lassen die Faktoren etwas größer werden, können wir dieselbe Darstellung auch im vierten Schuljahr sehr Gewinn bringend wieder einsetzen. Am Beispiel der Aufgabe „134 · 46" kann ein Punktefeld wie in Abbildung 2 aussehen.

Die Aufspaltung einer Malaufgabe mit mehrstelligen Zahlen in stellengerechte Teilaufgaben ist sehr anschaulich darstellbar. Für den einen oder anderen Schüler mag diese Darstellung schon völlig selbsterklärend sein. Für die meisten ist es aber sehr wichtig, dass die Aufspaltung nicht direkt vorgegeben wird, sondern im Unterrichtsprozess gemeinsam erarbeitet wird, um das Bild wirklich zu verinnerlichen. Die Malaufgabe, die für die Kinder zunächst unlösbar schwierig aussieht, lässt sich in diesem Beispiel in sechs einfache Teilaufgaben zerlegen, deren Ergebnisse – bedingt durch das geltende Distributivgesetz „$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$" für alle natürlichen Zahlen a, b, c – nach dem Ausrechnen wieder addiert werden können. Den Schülerinnen und Schülern in meiner Klasse fiel die Vorstellung dieser Aufspaltung nicht schwer, da sie das Punktefeld schon aus dem zweiten und dritten Schuljahr kannten.

### 2. Darstellung am Malkreuz

Unmittelbar zu diesem Punktefeld passt die Darstellung als Malkreuz, das auch schon im dritten Schuljahr beim großen Einmaleins Einsatz gefunden hat (Abb. 3). Die Teilaufgaben aus dem Punktefeld sind durch die gleiche räumliche Aufteilung im Malkreuz unmittelbar wieder zu entdecken. Die Zahlen im Malkreuz entsprechen genau der Anzahl von Punkten in den zugehörigen Teilfeldern des Punktefeldes. Nachdem auch diese Darstellungsform aufgrund der Vorerfahrungen aus den vorangegangen Schuljahren sehr schnell auf den neuen Zahlenraum übertragen werden konnte, handelt es sich

*Abb. 2 Punktefeld*



beim nächsten Schritt auf dem Weg zur schriftlichen Multiplikation um eine Darstellungsform, bei der die Kinder eine gewisse Zeit brauchten, um die Zusammenhänge zu entdecken.

### 3. Darstellung mit Malstreifen

Nach der Überwindung der ersten Hürde und dem Entdecken des Algorithmus, der hinter dieser ungewohnten Schreibweise steckt, habe ich die Erfahrung gemacht, dass insbesondere leistungsschwächere Kinder die Malstreifen (Abb. 4) so lieben gelernt haben, dass sie bei einer offenen Hausaufgabe begeistert in selbst gezeichneten Malstreifen über Milliarden hinaus gerechnet haben. Bevor Sie nun weiter lesen und ich Ihnen den Algorithmus verrate, versuchen Sie am besten selbst – über die Gemeinsamkeiten mit dem Malkreuz – den Rechenweg der Malstreifen zu entdecken!

Genauso bin ich auch im Mathematikunterricht vorgegangen: An der Tafel standen ein Malkreuz und ein Malstreifen, ausgefüllt mit derselben Aufgabe. Erzählt habe ich dazu, dass sich hinter dem neuen Streifenmuster ein Trick verbirgt, den der berühmte schottische Mathematiker *John Neper* im Mittelalter erfunden hat. Und den galt es, über das Äußern von Vermutungen und das direkte Vergleichen mit dem bereits bekannten Malkreuz herauszufinden. Eine sehr schöne und spannende Unterrichtsstunde, um die in den Bildungsstandards geforderte Kompetenz des „Kommunizierens" und des „Argumentierens" ausgiebig zu schulen.

Haben Sie *Nepers* Trick herausgefunden? Beim ziffernweisen Multiplizieren wird das Ergebnis in das entsprechende schräg geteilte Feld geschrieben, die Zehner ins obere Dreieck und die Einer ins untere. Nachdem alle Einzelprodukte notiert sind, finden sich dann in den diagonalen farbigen Streifen passend geordnet die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender. Durch stellenweise Addition entlang der farbigen diagonalen Streifen und unter Berücksichtigung von Überträgen „rutscht das Endergebnis unten raus" – so beschrieb es Felix sehr anschaulich.

Ein erster Vorteil gegenüber dem Malkreuz, den die Kinder sehr zu schätzen wissen, wird vor allem bei noch größeren Aufgaben sehr deutlich. David hat ihn sehr treffend auf den Punkt gebracht hat:

> „Und er hat so was erfunden, weil er keine Lust hatte, die ganzen Nullen zu schreiben und sich damit blöd zu verrechnen."

| · | 100 | 30 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 4000 | 1200 | 160 | 5360 |
| 6 | 600 | 180 | 24 | 804 |
| | | | | 6164 |
| | | | | THZE |

*Abb. 3 Malkreuz*

Zwei weitere Vorteile liegen auf der Hand: Der Bezug zur bildlichen Darstellung ist über die Verwandtschaft zum Malkreuz noch sehr nahe liegend. Es lässt sich ausgiebig mit den Kindern über Unterschiede sowie Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungen einer Malaufgabe reflektieren. Und: Der Algorithmus ist deutlich weniger fehleranfällig als das spätere schriftliche Verfahren, weil die beiden typischen Fehlerquellen hier auszuschließen sind:

- erstens das stellengerechte Untereinanderschreiben mit den Nullen und
- zweitens die Merkziffern im Kopf beim Multiplizieren.

Bei den Malstreifen „rutschen" die passenden Stellen „automatisch" richtig zusammen und die Kinder müssen noch nicht – wie beim schriftlichen Verfahren – die lästigen Merkziffern beim Ausmultiplizieren im Kopf behalten.

### 4. Malstreifen mit „verbotenen" bunten Ecken

Um den Übergang zum schriftlichen Verfahren hin zu bekommen, habe ich im nächsten und letzten Zwischenschritt die zweite der soeben genannten Schwierigkeiten des schriftlichen Verfahrens mit in die Malstreifen aufgenommen. Bei meinen „Malstreifen mit bunten Ecken" gab es eine besondere Regel: Es war streng verboten, in die bunten Ecken etwas

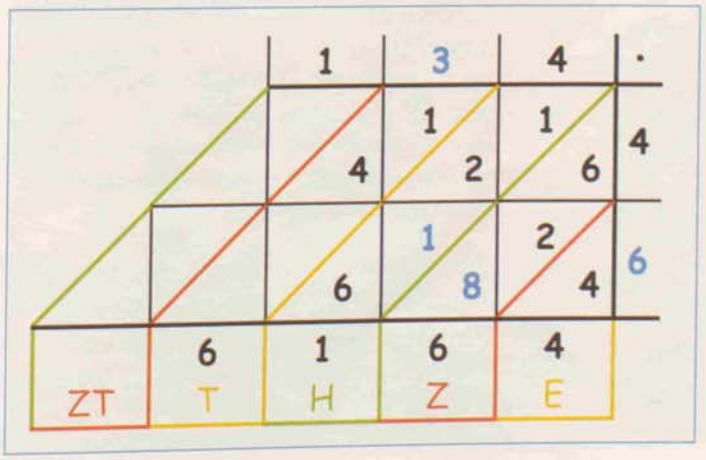



*Abb. 4 Malstreifen*

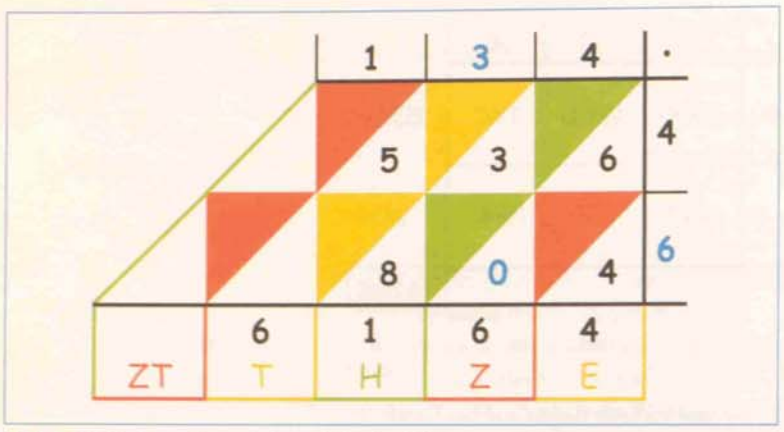



*Abb. 5 Malstreifen mit „verbotenen" bunten Ecken*

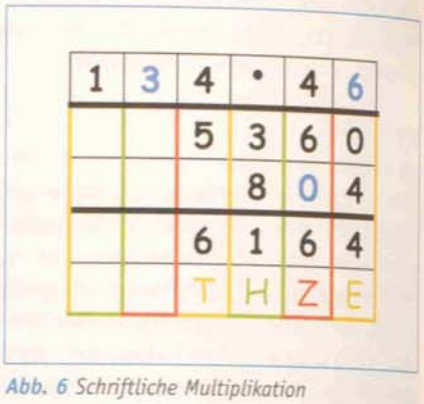



*Abb. 6 Schriftliche Multiplikation*

hinein zu schreiben. Und das, was man in die „verbotene Ecke" eigentlich hätte reinschreiben wollen, musste man sich im Kopf merken und zum nächsten Ergebnis hin zu addieren (Abb. 5).

Da die Kinder mit den Malstreifen schon sicher waren, war die Einführung der Merkziffern nur ein Katzensprung entfernt und dennoch passiert in den Köpfen nun schon genau das, was beim schriftlichen Multiplizieren gefordert wird. Anika erklärt den Unterschied zu den normalen Malstreifen sehr treffend:

> „Die Zahlen in den grünen Ecken wären ja zum Schluss eh da beim Hunderter mit reingerutscht und darum kommt das Gleiche raus."

Allein das Reflektieren dieses einen Zusammenhangs hätte Julian, dessen Lösung wir anfangs analysiert haben, ein besseres Verständnis davon geben können, wie es im schriftlichen Verfahren zu den Merkziffern kommt.

### 5. Schriftliche Multiplikation

Im letzten Schritt hin zum schriftlichen Verfahren wird jetzt nur noch der Zeichenaufwand reduziert, der sich für die „Malstreifen mit bunten Ecken" nicht mehr wirklich lohnt (Abb. 6). Das einzige, was dabei neu hinzu kommt, sind die Nullen als Stellen-Platzhalter, für die Julian vielleicht nicht das Verständnis entwickelt hatte wie Maja:

> „Die Nullen müssen da hin, damit die Hunderter auch ohne die bunten Rutschbahnen passend zu den anderen Hundertern im Ergebnis kommen."

## Fazit

Von diesem Weg mit vielen offenen Aufgabenstellungen haben alle Kinder profitiert: Die Leistungsschwächsten der Klasse haben mit den Malstreifen ein Verfahren kennen gelernt, mit dem sie wenig fehleranfällig große Zahlen multiplizieren können. Leistungsstärkere haben ausgiebig über Zusammenhänge aller fünf Darstellungsformen reflektieren und diskutieren können. Und alle Kinder haben über den schrittweisen Weg von der ikonischen zur symbolischen Darstellung einer Malaufgabe ein Verständnis für das schriftliche Verfahren entwickeln können. Sicherlich gibt es keine Garantie, dass Anika, Felix und David das Verfahren nun nie wieder vergessen. Aber auch wir Erwachsene können uns nach dem Verstreichen einer gewissen Zeit deutlich besser an Dinge erinnern, die wir nicht nur blind geübt haben, sondern mit denen wir uns wirklich tiefgreifend auseinandergesetzt haben. Der immense Einfluss, den das ausgiebige Reflektieren und begeisterte Diskutieren der Schüler auf den Verstehensprozess hatte, konnte auf diesen wenigen Seiten nur am Rande angedeutet werden. Doch ein Blick in fachdidaktische Literatur (z. B. Sjuts 2003; Meyer 2004, 35) zeigt sehr deutlich, wie wichtig die in solch einem Unterricht intensiv genutzten und geschulten metakognitiven Fähigkeiten für das Mathematiklernen sind. In diesem Sinne soll der hier skizzierte „Umweg" zur schriftlichen Multiplikation eine Anregung sein, unsere Unterrichtskultur dahingehend weiter zu entwickeln, dass wir durch tiefgehendes Reflektieren und Diskutieren spannender mathematischer Zusammenhänge die metakognitiven Fähigkeiten unserer Kinder herausfordern.

**Literatur:**


- KMK (Hrsg.): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Jahrgangsstufe 4. München 2004
- Meyer, H.: Was ist guter Unterricht? Berlin 2004, 35
- Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.): Kerncurriculum für die Grundschule. Schuljahrgänge 1–4. Mathematik. Hannover 2006
- Sjuts, J.: Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik (2003) 24, 18–40
- Winter, H.: Nepersche Streifen – ein selbst gebauter und verständlicher Computer in der Grundschule. In: mathematik lehren (1985) 13, 4–6
- Wittmann, E./Müller, G.: Das Zahlenbuch 4. Lehrerband. Leipzig 2005, 103–107
- Wittmann, E./Müller, G.: Das Zahlenbuch 3. Lehrerband. Leipzig 2005, 56–57


**Autorin**


Kirsten Winkel
Grundschule im Sande,
Rijswijker Straße 10,
49565 Bramsche;
Universität Osnabrück,
Institut für kognitive Mathematik